微分

【1 変数】

高専映像塾

ナレッジスター

目次

まえがき

僕が高専生向け指導を始めてからというもの、とにかくこの「微分積分」でつまづいている学生にびっくりするくらい頻繁に出会います。

理由はさまざまでしょう。特に大きいであろう理由は、1 年生の「基礎数学」ではなんとなく「そのとき習っているトピック」だけを勉強していれば点数が取れていたのに対し、2 年で登場するこの「微分積分」は、「今までの知識が芋づる式に必要になる」ということ。つまり、1 年生でならう基礎数学の知識から、微分（積分）の基礎公式まで、ぜーんぶが前提となって、次の新しいトピックがはじまること。だから過去にやった内容を忘れてしまうと、新しい内容が理解できなくなる。こういうことが起こるからです。

「数学は積み重ねの学問」だってよく言われます。でも、微分積分よりも前の数学は、そのとき習っていることだけに集中すれば何となくテストの点数くらいは取れるんです。たとえば、三角関数のことを習っているとき、指数や対数の知識は出てこなかったでしょ？だから、指数、対数のことを忘れていても、三角関数のテストでは点数取れましたよね。

でも、微分積分以降、それは通用しないと思って下さい。まるで土台の上に家を建てるかのように、「過去の知識」を土台として、「新たな知識」を積み上げてゆく。そんな数学がようやくここからはじまるわけです。

でも、だからといってあんまり不安になることは無いです。このテキストを今読んでくれているあなたは、もしかしたら微分積分が始まった瞬間に授業から振り落とされてしまって、どうすればいいのか全くわからずに立ち尽くしているのかもしれない。でも大丈夫です。この講義をしっかり見てくれれば、微分積分は思うがままに出来るようになります。クラスであなたの隣に座っている人よりもきっと、自信満々に計算して、語れるようになります。

- **微分積分に「暗記」は（ほぼ）必要ありません。**
  微分積分を学生に教えていると、「微分積分は覚える公式が多いから嫌だ！」という声をよく聞きます。しかし、これだけは肝に命じてください。**「公式暗記の繰り返しは数学ではありません」**。実際、この映像講義で皆さんに「まるっと暗記」してもらう新しい式（復習は除く）は、たぶん「8 つ」くらいです。それ以外のこと

は、その８つから全て導けます。導けるようになれば、自然と覚えます。何も怖いことはないです。あなたにも必ずできます。
数学の本質は、**「核となる基本法則」**と**「それ以外」**を**明確に区別**すること。そして、「核となる基本法則」（とても少ないです）から、あらゆることを導き出すことです。この映像講義では、丸暗記に頼ることなく、その方針を徹底してお話します。

- **僕は伝えられることは「やり方」だけ。**
  僕は皆さんに、微分積分を学ぶ上で「本質的に重要なこと」だけに的を絞って授業を進めます。覚えることの少なさ、意外にもシンプルな講義の流れに「え？こんなに簡単なの？」驚くかもしれません。しかし、この講義を見るだけでは、微分積分の試験で点数を取れるようにはなりません。
  数学はいわばスポーツのようなもの。「やりかた」を学び、「実際にやってみる」ことで、はじめて出来るようになります。この講義で僕がお伝えできるのは「やりかた」のところだけ。残りの「実際にやってみる」ところは、皆さんが手を動かして、頭を動かす必要があります。テキストの各章に必ず、問題演習をくっつけてあります。講義中でも解き方を解説します。皆さんは**授業をみ終わったあとに、必ずもう一回問題を解いて、全部解けるようになってください。**それだけで OK です。

- **「底力」をつけるのが一番楽です。**
  高専の定期試験では、過去問をどこからか拾ってきて点数を取るのがまあ楽だったりします。あまり重要度の高くない文系科目や専門科目はそれも一つのやり方ですが、数学でそれはやめましょう。というか、数学の試験は大体、基本的に小手先の「過去問暗記」が通用しないようになっているはずです。
  「数学」は、物理にせよ専門科目にせよ、あらゆることのベースです。ここを適当にやってしまう（丸暗記で誤魔化してしまう）と、これからの高専生活がどんどん辛くなるばかりか、大学編入試験、専攻科入試で大変な目に会うことになります。だから数学はとにかくきっちり、「暗記ではなく本質」を理解しましょう。それができていれば、定期試験なんて楽に得点できるはずです。

数学を「公式丸暗記」の繰り返しだと思って、嫌いだと感じている人もきっと多いでしょう。でも安心してください。それ、数学じゃないですから。あなたは多分「数学が嫌」なんじゃなくて「丸暗記が嫌」なんだと思います。でも大丈夫です。僕も「丸暗記大嫌い」ですけど、数学は大好きです。僕が「本当のやりかた」を皆さんにお伝えしますから、数学の本当の学び方、楽しみ方をこの授業から貪欲に、ひたすらに吸収してください。

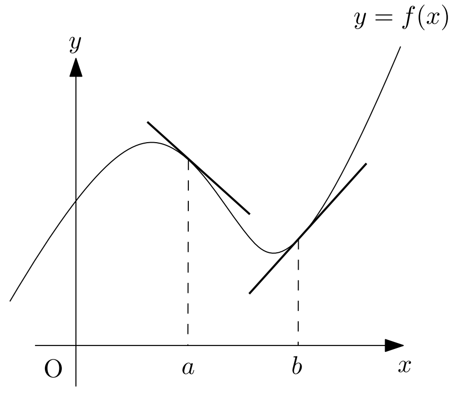
高専映像塾 ナレッジスター　「微分積分」担当　明松真司

第1章

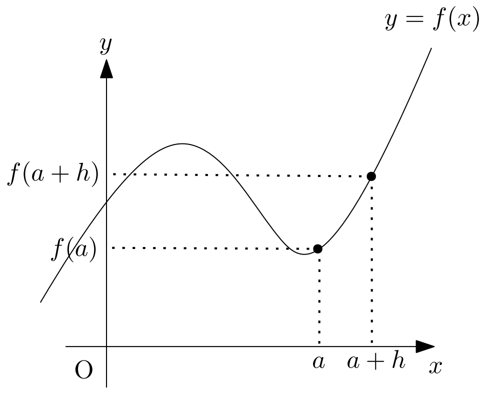
微分の定義

point

微分のテーマは**「関数の変化」**を調べること。
変化とはすなわち**「増えるか減るか」**。それは**その点での接線の傾き**により表される。

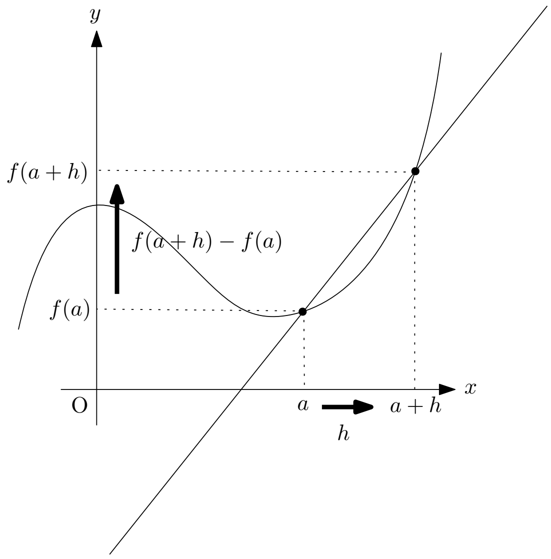


接線の傾きを計算するために、一旦まず、$x = a, x = a + h$ の 2 点に着目。



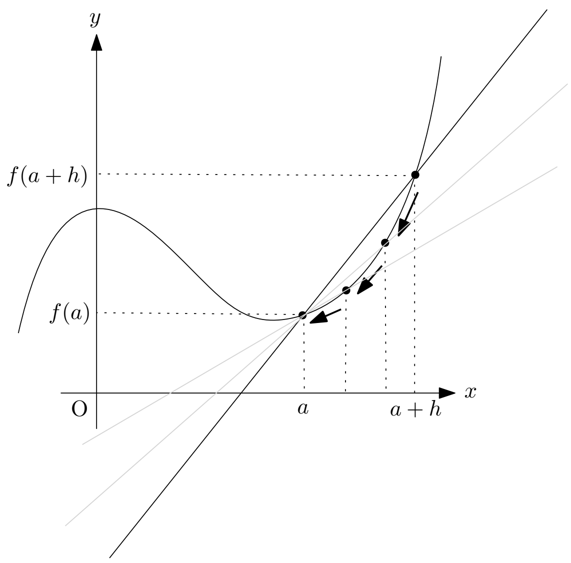
グラフ上の 2 点を結んで出来る直線の傾きは下の図より

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



h を限りなくゼロに近づけると、$a+h$ は a に限りなく近づくので、先程の傾きは「$x=a$ における接線の傾き」に限りなく近づく!!

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



これに $f'(a)$ という名前をつけて、$y=f(x)$ の $x=a$ における**微分係数 (differential coefficient)** と呼ぶことにしよう。

定義. 微分係数

関数 $y = f(x)$ について、以下のように計算される $x = a$ における「接線の傾き」を、$x = a$ における $y = f(x)$ の**微分係数 (differential coefficient)** という。

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

例題. 関数 $y = x$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。

解答. 定義に代入すればよい。$f(x) = x$ とおけば、

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

あとは、これを頑張って計算すればよい。

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}. \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

例題. 関数 $y = x^2$ の $x = -1$ における微分係数を求めよ。

解答. これも定義に代入すればよい。$f(x) = x^2$ とおけば、

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}.$$

あとは、これを頑張って計算すればよい。

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \to 0} \frac{(h-1)^2 - (-1)^2}{h}. \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(h^2 - 2h + 1) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (h-2) = -2. \end{aligned}$$

微分係数の式において、a を変数 x に置き換えると、各 x における $y = f(x)$ の接線の傾きを値として持つ便利な関数が得られる。この関数のことを $y = f(x)$ の**導関数 (derivative)** と呼び、$f'(x)$, または $\frac{dy}{dx}$ と表す。

定義．導関数

関数 $y = f(x)$ について、各 x における $y = f(x)$ の接線の傾きを値として持つ以下のような関数を、$y = f(x)$ の**導関数 (derivative)** という。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

関数 $y = f(x)$ の導関数を求めることを、$y = f(x)$ を**微分する**という。

導関数 $f'(x)$ の x に具体的な数値 (たとえば $x = 1$) を代入すると、その点における関数 $y = f(x)$ の接線の傾きが得られる。

例題. 関数 $y = x^2$ の導関数を定義に従って求めよ（微分せよ）。また、その結果を用いて $x = -1$ における微分係数（接線の傾き）を求めよ。

解答. 定義に代入すればよい。$f(x) = x^2$ とおけば、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

あとは、これを頑張って計算すればよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}. \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2hx+h^2)-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

よって、$f'(x)=2x$. ここに $x=-1$ を代入すると、$f'(-1)=-2$ が得られる。

我々がこれから「微分」だ「導関数」だと当たり前のように扱って行くものの正体は、元をたどればすべてこの定義。しかし、次のような問題もある。

- いちいち定義に基づいて極限を計算して... は、非常に手間がかかる。
- 複雑な関数になると、そもそも極限計算が出来るかどうかわからない。

この問題を乗り越えるために、定義を使わずに「効率的に」導関数を計算するための「公式」を作り出すことが、これからの課題!!

1.1 演習問題

(1) 関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の定義を書け。また、それは図形的に何を表すか簡潔に説明せよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を書け。また、この関数の値は何を表すか簡潔に説明せよ。

(3) 定数関数 $y=C$ の導関数を求めよ。

(4) 1 次関数 $y=ax+b$ の導関数を求めよ (a,b は定数)。

(5) $y=x^3$ の $x=1$ における微分係数を求めよ。

(6) 導関数の定義を用いて、次の性質を証明せよ (**微分の線形性**)。

$$\{\,af(x)+bg(x)\,\}'=af'(x)+bg'(x)$$

第2章

基本的な関数の復習

point

「微分」では、いろいろな関数の導関数を求めるのがひとつの目標。つまり微分を学んでいると、以下のような関数が頻繁に現れる。

- $y = x^n$ (1 変数 n 次単項式)
- $y = a^x$ (指数関数)
- $y = \sin x, y = \cos x$ (三角関数)
- $y = \log x$ (対数関数)

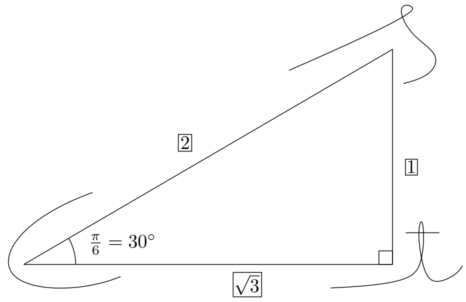
たくさんの学生が「微分」でつまづく原因は、こんなふうに基礎数学で出てきた関数が「オールスター」状態で登場すること。でも、きちっと復習してから挑めば怖くない。微分積分で「必ず必要になる」重要なトピックのみを抽出したので、ここは必ずしっかりと抑えよう。ちなみに、これらの内容に自信があってもういまさら復習しなくていいよ！という読者は、いきなり演習問題まで飛んでも良い。

2.1 三角比（三角関数）

三角比（三角関数）の値を求めるときは、以下のような思考が瞬時に頭を巡ってほしい.

(1) **鋭角**なら、瞬時に三角形が頭に浮かんで、以下の「覚え方」に則って計算.

[例] $\sin\frac{\pi}{6}$

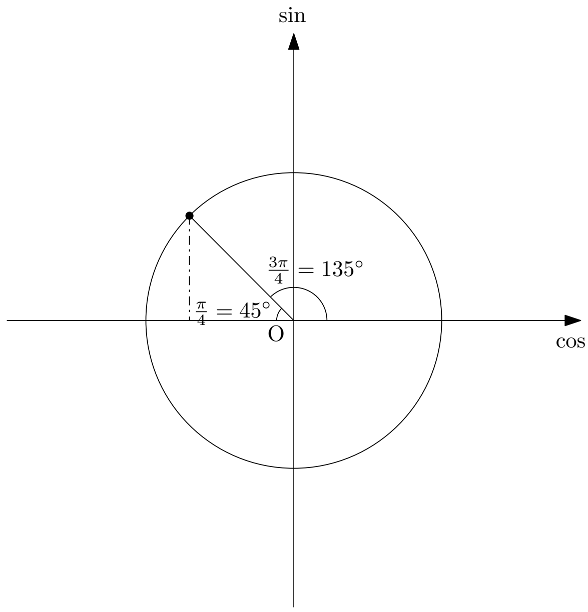


$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

(2) 0 度または鈍角のとき

(1) 単位円上にその角度の動径をとる.

[例] $\cos\frac{3\pi}{4}$



(2) cos は x 座標、sin は y 座標.（出来上がった直角三角形の三角比を鋭角のときと同じように計算し、符号を決める）

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

このような流れで、あらゆる三角比が**「6 秒以内」**に求められるようになっていることが望ましい. また、以下の三角比に関しては「ごちゃごちゃ」になってしまっている学生が多い. 暗記ではなく「単位円を常に頭で意識」してこれらの値を正確に答えられるようになろう.

$$\sin 0=0,\sin\frac{\pi}{2}=1,\sin\pi=0$$

$$\cos 0 = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = -1$$

$$\tan 0 = 0, \tan\frac{\pi}{2}\text{は定義できない}, \tan\pi = 0.$$

2.1.1　三角比の相互関係

次の 3 つの式**（三角比の相互関係）**は、必ず完璧に覚えておかなければならない.

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ 1 + \tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

特に、1 つ目を少し変形した式

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

は、瞬時に頭に浮かんで使えるようになっておこう
($\sin^2$ は $\cos^2$ を使って書ける。$\cos^2$ は $\sin^2$ を使って書ける)。

2.1.2　加法定理

加法定理は, 三角比の数ある公式の中で最も重要なものだ。**必ず瞬時に正確に思い出して使えるように**しなければならない。

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \underbrace{\sin\alpha\cos\beta}_{\text{咲いたコスモス}} \pm \underbrace{\cos\alpha\sin\beta}_{\text{コスモス咲いた}}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \underbrace{\cos\alpha\cos\beta}_{\text{コスモスコスモス}} \mp \underbrace{\sin\alpha\sin\beta}_{\text{咲いた咲いた}}$$

なぜ加法定理が大切かというと、それは「ほとんどの重要な公式が相互関係＆加法定理を使えば導ける」からだ。

2.1.3　倍角の公式

倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

この公式は、丸暗記などするまでもなく、加法定理から導出することができる。

sin **の倍角公式の導出**

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) \quad (\alpha+\alpha\text{だと考える})\\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \quad (\text{加法定理})\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

2.1.4　半角の公式

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

しかし、頭のなかには次の形で入れておくとよい。

半角の公式

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

sin **の半角の公式の導出**

cos の倍角の公式を思い出そう。

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

これを $\sin^2\alpha$ について解けばよい。

$$\begin{aligned} 2\sin^2\alpha &= 1-\cos 2\alpha \\ \sin^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

他にも、加法定理を使えばさまざまな定理を導出できる（演習問題では「積を和になおす公式」の導出にチャレンジしてみよう）。

2.2　指数関数と対数関数

指数関数、対数関数も、微分積分学においてどうやっても避けて通ることはできない、極めて重要な関数だ。まず、指数関数から復習していこう。

2.2.1　指数法則

指数関数で最も重要なのは**指数法則**である。

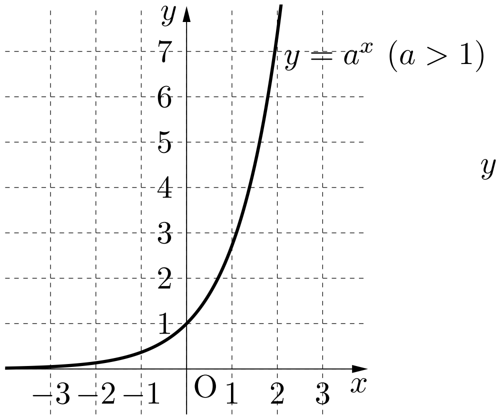
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} \\ (a^m)^n &= a^{mn} \end{aligned}$$

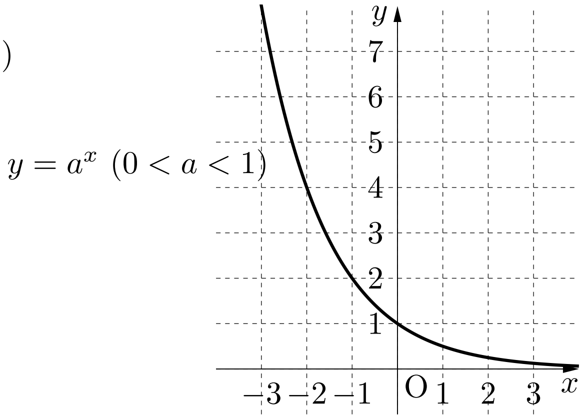
以下の重要なルールについても、必ず知っておこう。

$$\begin{aligned} a^{-m} &= \frac{1}{a^m} \quad \text{(マイナス乗は逆数)} \\ a^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[m]{a} \quad (m \text{ 分の一乗は } m \text{ 乗根}) \\ a^0 &= 1 \quad \text{(どんな数も 0 乗は 1)} \end{aligned}$$

2.2.2　指数関数のグラフ

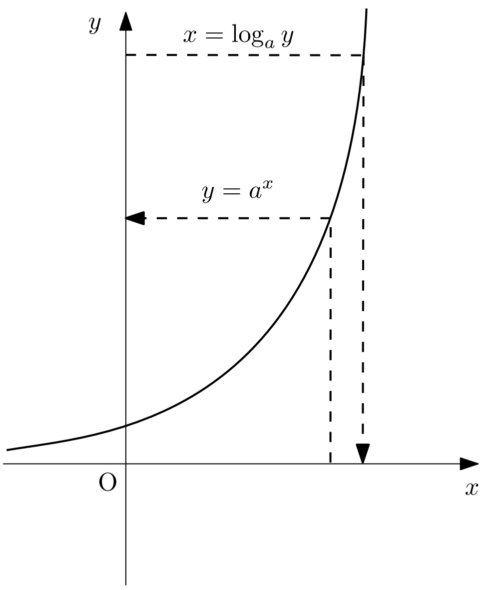
指数関数のグラフの形は以下の通り。これは**必ずすぐに書けるように**。覚えて忘れて覚えて忘れてという繰り返しだけは絶対にやめよう。





2.2.3 対数関数

対数関数は、**指数関数の逆関数**のことである。以下のようなグラフの関係を理解できると良い。



指数と対数の以下の関係は、すべての根本となるものである（同じことを指数の言葉と対数の言葉で言い換えているだけ）。

$$\underbrace{a^p = M}_{\substack{a \text{ を } p \text{ 乗したら} \\ M \text{ になります}}} \iff \underbrace{p = \log_a M}_{\substack{a \text{ を何乗すると } M \text{ になる?} \\ \text{それは } p \text{ 乗です。}}}$$

簡単な対数の値は、この意味を考えれば直接計算することができる。

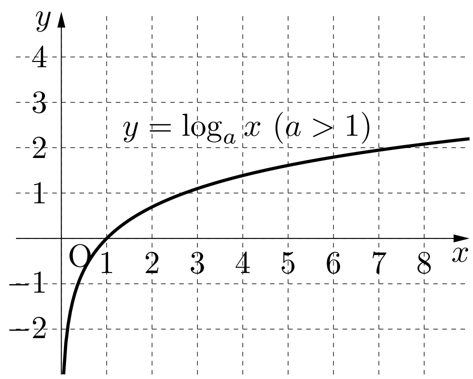
[例] $\log_2 8 = 3$ (2 を何乗すると 8 になる？それは 3 乗です)
[例] $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (3 を何乗すると$\frac{1}{9}$になる？それは -2 乗です)

しかし、毎度この意味を考えて対数の値を計算するのは面倒である。以下の性質は「ノータイムで」思い出せるようにすること。

$$\log_a 1 = 0 \quad (a \text{ を何乗すると } 1 \text{ になる？それは } 0 \text{ 乗です})$$
$$\log_a a = 1 \quad (a \text{ を何乗すると } a \text{ になる？それは } 1 \text{ 乗です})$$
$$\log_a a^b = b \quad (a \text{ を何乗すると } a^b \text{ になる？それは } b \text{ 乗です})$$

$$\log_a b^c = c \log_a b \quad (\text{肩から下ろせる})$$
$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN \quad (\text{対数の和は真数の積})$$
$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \quad (\text{対数の差は真数の商})$$

対数関数のグラフは以下のような形になる。これも、**瞬時に書けなければならない**。



2.3　演習問題

(1) 以下の関係式を導出せよ。

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

(2) α は鋭角とする。$x = \sin \alpha$ のとき、$\cos \alpha$ を x を用いて表わせ。また、$\sin 2\alpha, \tan \alpha$ を x を用いて表わせ。

(3) 三角関数の積和変換公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

を加法定理から導出せよ。

(4) 次の等式を証明せよ ($a > 0$)。

$$1+\left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}\right)^2.$$

(5) 次の等式を証明せよ。

$$b^x = a^{x\log_a b}.$$

(6) **底の変換公式**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

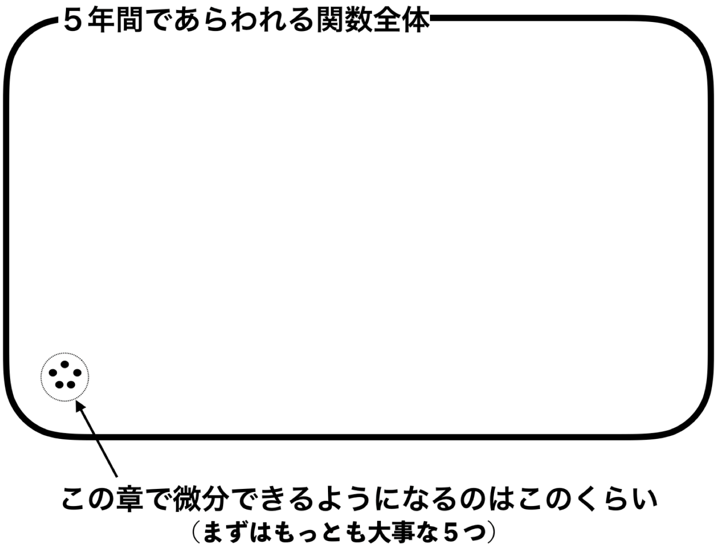
を証明せよ。

第3章

基本的な微分公式

point

導関数を毎回定義から求めるのは大変!!そこで、導関数を効率的に計算するために、基本的な関数の導関数はこれ！という**「導関数（微分）の公式」**をいろいろ導こう。



3.1 核となる微分公式

導関数の定義を復習しておこう。$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$（または $\frac{dy}{dx}$ と書くこともある）は以下のように定義されるのだった。

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

この定義を用いて毎回導関数を計算するのは大変なので、主要な関数の導関数をあらかじめ導出しておいて、「微分公式」として瞬時にそれを使いこなせるようにしておこう。

3.1.1　x^n の導関数

$y = x^n$ の導関数を求めよう。$f(x) = x^n$ と書くことにする（ちなみにこの計算はやや難しいので、もしよくわからんなと思ったら、結果だけを覚えておいても良い)。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + {}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h}\\
&\qquad (\text{二項定理で } (x+h)^n \text{を展開した})\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{{}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-1} + h^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[{}_nC_1x^{n-1} + h({}_nC_2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-3} + h^{n-2})\right]\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

これにより、$(x^n)' = nx^{n-1}$ がわかった。

x^n の微分公式 (必ず暗記!!)

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

この公式は最も基本的かつ最も重要な微分公式である。以下のように「絵的に」覚えておくと良い。

1引く

$$x^{n} \to nx^{n-1}$$

3.1.2　三角関数の導関数

$y = \cos x, y = \sin x$ の微分公式を導こう。(tan は今はとりあえず考えない)

$f(x) = \sin x$ と書くことにする（ちなみにこの計算もやや難しいので、もしよくわから

んなと思ったら、結果だけを覚えておいても良い)。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\\
&\quad \text{(三角関数の差を積になおす公式)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x
\end{aligned}$$

$\sin x$ の微分公式が得られた。ほぼ同様の極限計算で、$\cos x$ の導関数が $-\sin x$ であることも導ける。

$\sin x$ と $\cos x$ の微分公式 (必ず暗記!!)

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

3.1.3　指数関数の導関数

指数関数 $y = a^x$ を考えよう $(a > 0)$。$f(x) = a^x$ と書くことにしよう。先程と同じように導関数の定義に代入する。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} a^x\underbrace{\frac{a^h-1}{h}}.
\end{aligned}$$

さて、ところで。指数関数の底として、**「なるべく微分の計算が簡単になるものを選びたい」**というのは自然な発想だと思う。そこで、上式の $\frac{a^h-1}{h}$ が簡単な**「ちょうど 1」($h \to 0$ のとき)** になってくれるように底 a を選ぶことにする。その値は

$$a = 2.71828...$$

という値であることが知られている。この底の値を e と書くことにし、**ネイピア数**と呼ぶ。

定義．ネイピア数

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$ を満たす a を e と書き、**ネイピア数 (Napier's constant)** と呼ぶ。

$$e = 2.71828...$$

である。

ネイピア数 e の定義より、次の極限値が得られる。

定義．ネイピア数

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

これを証明しよう。まず、ネイピア数の定義より、

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

両辺に h をかけると、

$$\lim_{h\to 0}(e^h-1) = \lim_{h\to 0} h.$$

さらに左辺の 1 を移項すると、

$$\lim_{h\to 0} e^h = \lim_{h\to 0}(1+h).$$

両辺を $\frac{1}{h}$ 乗すると、

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

これにより示せた。

微分積分では通常、底 e の指数関数 $y=e^x$ を用いることにする。この導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\substack{\to 1 \\ (e\ \text{の定義より})}} = e^x. \end{aligned}$$

このように、e^x は微分しても e^x である。

e^x の微分公式 (必ず暗記!!)

$$(e^x)' = e^x$$

3.1.4　対数関数の導関数

微分積分では、指数関数の底を通常ネイピア数 e とし、指数関数 $y = e^x$ を扱うのだったが、対数関数はその逆関数 $y = \log_e x$ を通常扱うことにする。毎回底を書くのは面倒なので、底が e の対数関数を底を省略して $y = \log x$ と書くことにして、**自然対数**と呼ぶ[*1]。$y = \log x$ の導関数を求めよう。$f(x) = \log x$ と書くことにする。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log x + h - \log x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\frac{x}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

$k = \frac{h}{x}$ と置く。$h \to 0$ のとき $k \to 0$ なので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{k\to 0} \frac{1}{x}\frac{1}{k} \log(1+k) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k\to 0} \log \underbrace{(1+k)^{\frac{1}{k}}}_{\to e} \\ &= \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

この導出はかなり難しいので、あまり気にせずに結果だけを覚えておいてほしい（後に「合成関数の微分法」を学べば、これはもっともっと簡単に導出できる）。

$\log x$ の微分公式 (必ず暗記!!)

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

3.2　核となる 5 つの公式

微分を学ぶ上で、**今まであげた 5 つの公式は必ずノータイムで思い出せる状態になる必要がある。**

[*1] こういう理由で、e は「自然対数の底」と呼ばれることもある。

微分の核となる 5 つの公式

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= nx^{n-1} \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(e^x)' &= e^x \\
(\log x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

あと、**「定数関数の微分は 0」**という公式も（当たり前すぎる結果なのでここには入れていないが)、常識として必ずノータイムで思い出せるようになっておくこと。

定数関数の微分は 0

$$(C)' = 0$$

もちろん、これらを覚えただけではまだほとんど何もできない。しかし、これらの公式に合わせて「公式の組み合わせ方」を 3 つ習得すれば（合計でわずか 8 種類の暗記)、膨大な数の関数の微分を自由自在に出来るようになる。まずはこの 5 つの公式を何が何でも覚えよう。ちなみに、導出に関してはほぼ必要となることはないので、手っ取り早く微分ができるようになりたいという読者は導出は無視して良い。

3.3　演習問題

1. 次の関数の導関数を求めなさい、

(i) $y = x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $y = \dfrac{2x^2 + x\sqrt{x} - 3x + 5}{x^2}$

(iii) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$

(iv) $y = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

(v) $y = 3\sin x + 2\cos x$

(vi) $y = \log x - e^x$

(vii) $y = 5e^x - 5 + 5\log x$

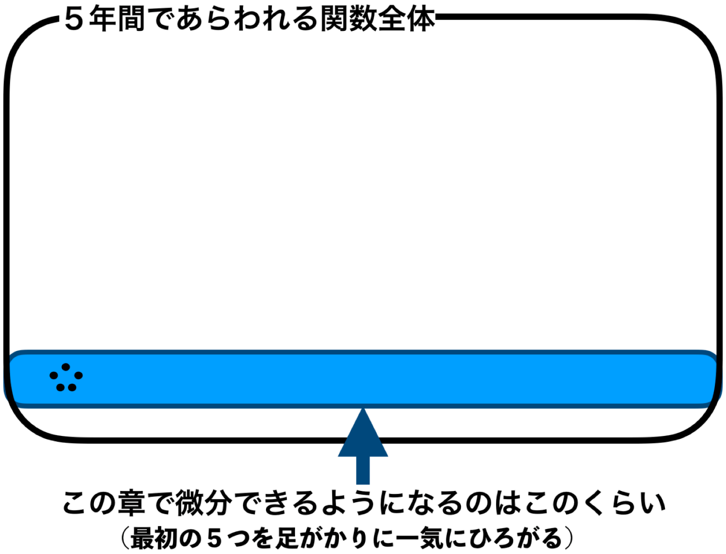
(viii) $y = \frac{1}{2}\sin x + 2e^x + x^2$

第4章

積の微分法則と商の微分法則

point

核となる基本法則のうち２つ「積」「商」の微分法則を扱おう。



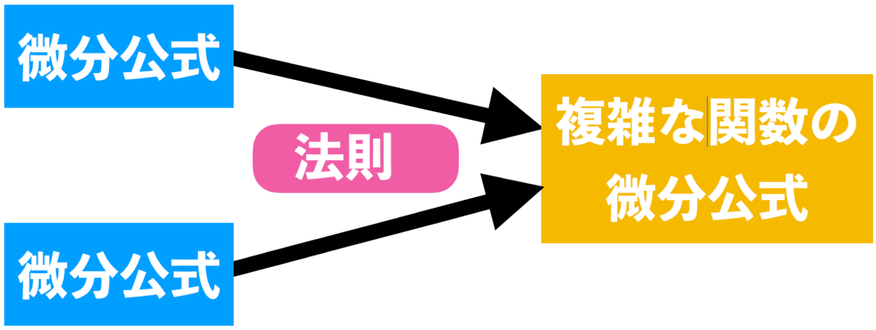
4.1 「法則」は公式の組み合わせ方

これはこの講義だけの言葉遣いだが、この講義においては、

- 具体的な関数の微分の結果 → 微分**公式** (formula)
- 公式を組み合わせる方法（ルール）→ 微分**法則** (rule)

と呼び分けることにする。前章で導いた５つの結果が「公式」であり、これから扱うのが「法則」である。**少数の「公式」を「法則」によって組み合わせることにより、膨大な数の**

関数の導関数が求められるようになる。



4.2　積の微分法則

例題. 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = xe^x.$$

今我々はこの関数の微分公式は知らないが、以下のように考えてしまいそうになる[*1]。

※間違った微分のしかた

$$y = \underbrace{x}\ \underbrace{e^x} \Rightarrow \boxed{x \text{ と } e^x \text{の積!!}}$$

それぞれ微分して、

$$y' = \underbrace{(x)'}\,\underbrace{(e^x)'} = 1 \times e^x = e^x.$$

しかし、「積をそれぞれ微分する」というのは**間違い**。正しい導関数を求めるためには、以下の**積の微分法則**を使わなければならない。

[*1] 微分積分学の祖、ライプニッツもずっとこの間違いをしていたというのは有名は話。

積の微分法則

$$\left\{\underbrace{f(x)g(x)}_{\substack{f(x)\ \text{と}\ g(x)\\ \text{の積}}}\right\}' = \underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}\underbrace{g(x)}_{\text{しない}} + \underbrace{f(x)}_{\text{しない}}\underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}.$$

証明は本テキストの最後の付録に収録した*2。

先程の例題を解こう。

$$\begin{aligned}\{\,xe^x\,\}' &= \underbrace{(x)'}_{\text{ビブン}}\underbrace{e^x}_{\text{しない}} + \underbrace{x}_{\text{しない}}\underbrace{(e^x)'}_{\text{ビブン}}\\ &= e^x + xe^x\\ &= e^x(x+1).\end{aligned}$$

これが正しい導関数である。

例題. 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = x^2\cos x.$$

これも、以下のような積になっていることに気づけば一撃だ。

$$y = \underbrace{x^2}\underbrace{\cos x}$$

積の微分法則に当てはめると、

$$\begin{aligned}y' &= (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)'\\ &= 2x\cos x + x^2(-\sin x)\\ &= 2x\cos x - x^2\sin x\\ &= x(2\cos x - x\sin x).\end{aligned}$$

*2 ちなみに、このように本テキストで「証明を付録に譲る」としている命題に関しては、(もちろん、証明が知りたいという意欲的な学生は是非おさえてほしい) が、「混乱をしたくない」、「まずは微分積分の問題をしっかり解けるようになりたい！」という学生は証明を無視しても特に問題はない。著者は少なくとも、この証明を知らなきゃ解けない問題には一度も出会ったことがない。

例題. 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = e^x \sin x.$$

以下のような積になっていることに気づく。

$$y = \underbrace{e^x}\underbrace{\sin x}.$$

積の微分法則に当てはめると、

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x (\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

積の微分法則の使い方はこんな感じである。特に難しいことは無いが、突然積が出てきたときに、うっかりと積の微分法則を忘れて誤った微分をしてしまわないように注意。

4.3 商の微分法則

商の形になっている関数

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

も、以下のように微分をしてしまいそうになるが、間違いだ。

※間違った微分のしかた

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}. \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ と } g(x) \textbf{ の商!!}}$$

それぞれ微分して、

$$y' = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \textbf{間違い}!!$$

商の形に気づいたら、以下の「商の微分法則」を用いて導関数を求める。

商の微分法則

$$\left\{\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{f(x)\ \text{と}\ g(x)\\ \text{の商}}}\right\}' = \frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{ビブン}}\overbrace{g(x)}^{\text{しない}} - \overbrace{f(x)}^{\text{しない}}\overbrace{g'(x)}^{\text{ビブン}}}{\underbrace{\{\,g(x)\,\}^2}_{\substack{\text{分母の}\\ 2\ \text{乗}}}}$$

これも証明は巻末の付録に収録した。また、商の微分法則は次章で登場する「合成関数の微分法」を用いると、簡単に証明することができる (これも付録に収録した)。

商の微分法則を使う上で、気をつけなければいけないことが２つ。

- **分子の真ん中の符号がマイナスになっている**ことに注意。
- **分母の 2 乗は基本的にそっとしておいたほうが吉** (展開とかしないほうがいい)。

実践してみよう。

例題. 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \frac{5x^2 + x}{3x^3 + 1}$$

次のような商になっていることに気づけばよい。

$$y = \frac{\overbrace{5x^2 + x}^{\text{分子}}}{\underbrace{3x^3 + 1}_{\text{分母}}}$$

商の微分法則に当てはめると、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(5x^2 + x)'(3x^3 + 1) - (5x^2 + x)(3x^3 + 1)'}{(3x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{(10x + 1)(3x^3 + 1) - 9x^2(5x^2 + x)}{(3x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{30x^4 + 10x + 3x^3 + 1 - 45x^4 - 9x^3}{(3x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-15x^4 - 6x^3 + 10x + 1}{(3x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

こんな感じで微分をすればよい。

例題. 次の関数の導関数を求めよ (tan **の微分公式**)。

$$y = \tan x$$

一見、積や商には見えないが、三角関数の相互関係の 2 本目の式

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

を思い出すと、

$$y = \frac{\overbrace{\sin x}^{\text{分子}}}{\underbrace{\cos x}_{\text{分母}}}$$

という商だということに気づく[*3]。あとは商の微分法則に当てはめれば、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{(三角関数の相互関係の 1 本目)} \end{aligned}$$

ちなみに、この結果は覚えろという先生や参考書も存在するが、まぁ「必要になったときは導出する」というのを何度かやっていれば自然と覚えるので、そうやって頭に入れたほうがよい。

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[*3] $\tan x$ をそのままどうこうすることは出来ないが、我々はsin と cos の導関数なら知っている。だから、sin と cos を用いて書き直したわけだ。

例題. 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \frac{\log x}{x^2}$$

以下のような商になっている。

$$y = \frac{\overbrace{\log x}^{\text{分子}}}{\underbrace{x^2}_{\text{分母}}}$$

商の微分法則に当てはめると、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\log x)' x^2 - \log x (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \log x}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x \log x}{x^4} \\ &= \frac{x(1 - 2\log x)}{x^4} \\ &= \frac{1 - 2\log x}{x^3}. \end{aligned}$$

例題. 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

次のような商だとわかる。

$$y = \frac{\overbrace{\log x}^{\text{分子}}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{分母}}}$$

商の微分法則に当てはめると、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\log x)'\sqrt{x} - \log x(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4.4　積と商の微分法則は超大事

積と商の微分法則は、微分の理論の中できわめて重要な役割を演じる 2 法則なので、前章で学んだ 5 公式と合わせて必ずノータイムで思い出せるまで習熟して欲しい。

微分の核となる基本法則群 (現在)

- **微分公式**
  - $(x^n)' = nx^{n-1}$
  - $(e^x)' = e^x$
  - $(\sin x)' = \cos x$
  - $(\cos x)' = -\sin x$
  - $(\log x)' = \frac{1}{x}$
- **微分法則**
  - 積の微分法則 $\{\, f(x)g(x) \,\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - 商の微分法則 $\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{\, g(x) \,\}^2}$

そして次章で登場する「もっとも重要」な法則「合成関数の微分法」をマスターすれば、原理的には（高専の 5 年間であらわれる）ほぼあらゆる関数を微分できるようになる。

4.5　演習問題

1. 次の関数を微分せよ。

   (1) $y = (x^3 + 2x)(x^2 + 1)$

   (2) $y = x \log x$

   (3) $y = e^x \cos x$

   (4) $y = x^2 e^x$

(5) $y = \sin 2x$　(次章で扱う「合成関数の微分法」を使えばさくっと計算できるが、今の段階の知識でも計算ができる。というのも、$\sin 2x$ を 2 倍角の公式で変形すると、積の微分法則が使える形になる。)

2. 次の公式を導出せよ **(積の微分法則の 3 つ ver)**。

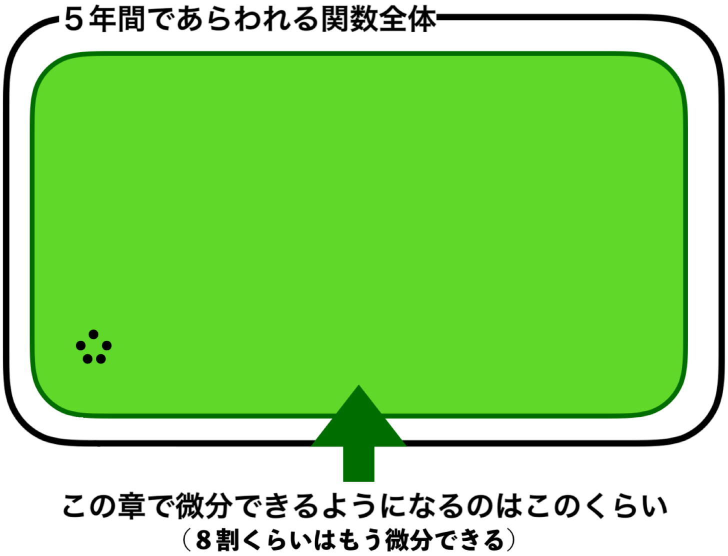
$$\{\, f(x)g(x)h(x)\,\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

第5章

合成関数の微分法(1)

point

さて、微分において最も重要だと言っても過言ではない法則「合成関数の微分法」が本章と次章のテーマだ。合成関数の微分法は、多くの学生がつまづく内容であると同時に、微分の習得において絶対に避けて通ることの出来ない内容でもある。
なので、このテキストでは、合成関数の微分法を 2 章に分けて解説することにした。前半 (本章) では、合成関数の微分法「とはなにか」を詳しく説明する。まずは基本に習熟していただきたい。そして後半は、合成関数の微分法を「どうやって使うか」を説明する。後半の内容まで習熟できれば、膨大な関数の導関数を求めることが可能になる。まずは基本から、はじめて行こう。



5.1　合成関数

まず、「合成関数」という言葉を理解しなければ、「合成関数の微分法」を理解することは（当然ながら）出来ないだろう。合成関数とは、簡単にいえば「関数の連鎖」のことである。具体的にいうと、例えば、

$$f(x) = \sin x, g(x) = 2x + 1$$

のとき、$f(x)$ の x の代わりに $g(x)$ を代入したもの、すなわち

$$f(g(x))$$

を考えると、

$$f(g(x)) = \sin(2x + 1)$$

となる。これはやはり、x **の関数**である。

合成関数

関数 $f(x), g(x)$ について、

$$f(g(x))$$

により得られる新たな x の関数を、f, g の**合成関数**と呼ぶ。

いくつかの合成関数を見てみよう。

例題. 合成関数 $f(g(x))$ を求めよ。

(1)

$$\begin{cases} f(x) &= e^x \\ g(x) &= 3x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} f(x) &= \log x \\ g(x) &= x^2 + x \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} f(x) &= \sin x \\ g(x) &= e^x \end{cases}$$

(1) $f(x)$ の x のところに $g(x)$ を代入すればよいので、

$$f(g(x)) = e^{3x}.$$

(2) 同様に

$$f(g(x)) = \log(x^2 + x).$$

(3) 同様に

$$f(g(x)) = \sin e^x.$$

「$f(x)$ と $g(x)$ が与えられたときに $f(g(x))$ を求める」ことは、あまり難しくないだろう。では、この逆はどうだろうか？すなわち、「とある関数が与えられたとき、それが $f(g(x))$ と表せる $f(x), g(x)$ を見つけられるか？」という問題を考えよう。これが出来るかどうかで、合成関数の微分法を習熟できるかどうかの勝負が分かれる。

例題. $f(x), g(x)$ を求めよ。

(1) $f(g(x)) = e^{3x}$
(2) $f(g(x)) = \log(x^2 + x)$
(3) $f(g(x)) = \sin e^x$

先程の問題の全くの逆であるから、考え方も逆にたどれば良い。

(1) 次のようにみれば良い。

$$f(x) = e^x, g(x) = 3x.$$

$f(g(x))$ を実際に計算すると、

$$f(g(x)) = e^{3x}.$$

(2) 次のようにみれば良い。

$$f(x) = \log x, g(x) = x^2 + x.$$

$f(g(x))$ を実際に計算すると、

$$f(g(x)) = \log(x^2 + x).$$

(3) 次のようにみれば良い。

$$f(x) = \sin x, g(x) = e^x.$$

$f(g(x))$ を実際に計算すると、

$$f(g(x)) = \sin e^x.$$

このように、「具体的な関数が与えられたとき、$f(x), g(x)$ を見つける」ことが、合成関数の微分法に習熟する鍵となる。

5.2　微分の記法

さて、今まで、関数はすべて「x の関数」を考え、微分といえば「x という文字」で微分、というのが当たり前だった。

この記法を少し厳密に決めておこう。今、$y = f(x)$ という関数があったとき、これを x という文字で微分することを今までは y' と書いていたが、これを以下のように書いても良いことにする。

$$\frac{dy}{dx}.$$

このように書くことによって、**「どういう文字で微分をしているのかが明確になる」**ので便利である。

例えば、t の関数 $y = g(t)$ を t という文字で微分するときは、

$$\frac{dy}{dt}$$

という感じで表す。このような $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dt}$ という記法は「y を x で微分する」「y を t で微分する」というそれ以上の意味はない[*1]。

5.3　合成関数の微分法

「合成関数の微分法」とは、関数の「合成関数としての姿」を捉えれば、簡単に微分が行える！という法則だ。

---

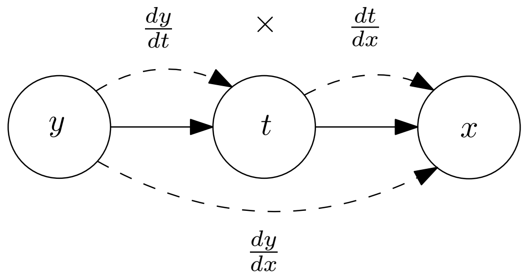
*1 たまにこれを「でぃーえっくすぶんのでぃーわい」とか「でぃーてぃーぶんのでぃーわい」とか読む学生がいるのだが、分数ではないので普通はそう読まない。読み方は「でぃーわいでぃーえっくす」「でぃーわいでぃーてぃー」が正解だ。

合成関数の微分法

$y = f(g(x))$ について、$t = g(x)$ とおけば、$y = f(t)$ となる。このとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

以下のイメージを持っているとよい。



雑談.

筆者の経験上、**微分でつまづく大半の学生はここでつまづく**。しかも、そのような学生には以下の特徴があることが多い。

- 丁寧に噛み砕いて説明すると、その場では何となく出来るようになる。・
- でも 1 週間後に聞くと必ず忘れている（復習をしていない＆習得に必死になっていない証拠)。

この理由は多分以下の通りである。1 年の基礎数学くらいであれば、内容が単純なので何度か振り返りをすれば、別にそんなに習得に必死にならなくても、何となく具体的な計算方法が脳に焼き付くわけだ。微分公式も、積の微分も商の微分も、何度かの振り返りでどうにか脳に焼き付けられるくらいの単純な法則だった。

しかし、合成関数の微分法はやや抽象的であり、かつ、見た瞬間に一発で内容を理解できる形ではない。要するに、**「そう簡単に脳に焼き付くわけではない」**法則なのである。

だが、この法則は「順を追ってまずは丁寧に理解する」「慣れてきたら手順を省略する」という地道なアプローチによって、必ず習得できる。今までのように「何となくやっていれば気づいたら習得できる」ほど簡単じゃないぞということだ。気合を入れて理解に励もう。

ちょっとこの合成関数の微分法は何を言っているかわからないという学生が多いだろう。例を通じて理解していく。

例題. 次の関数を x で微分せよ。

$$y = e^{3x+1}$$

さて、この関数を見た瞬間に「合成関数 $f(g(x))$ としての構造」を見抜いてほしい。この場合は、$f(x) = e^x, g(x) = 3x + 1$ とすれば、$f(g(x)) = e^{3x+1}$ である。

で、ここからが重要である。まず、今欲しいのは $\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{y\text{ を }x\text{ で微分}}$ だ。しかし、この式を微分する公式など我々は知らない。しかし、合成関数の微分法を以下の手順で適用すれば、導関数を求めることができる。

(1) $t = g(x)$ とおく。すなわち、この場合は $t = 3x + 1$ と置く。そうすると、

$$y = f(t) = e^t$$

というふうに、y が t の関数で表せる。

(2) そして、$\frac{dy}{dx}$ は以下のように計算できるというのが合成関数の微分法だ。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= e^t \cdot 3 \\ &= 3e^t \\ &= 3e^{3x+1}.\end{aligned}$$

例題. 次の関数を x で微分せよ。

$$y = (5x+3)^5$$

$f(x) = x^5, g(x) = 5x+3$ とおけば、$f(g(x)) = (5x+3)^5$ である。

(1) $t = \underbrace{5x+3}_{g(x)}$ と置く。すると、

$$y = \underbrace{t^5}_{f(t)}.$$

(2) 合成関数の微分法より、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= 5t^4 \cdot 5 \\ &= 25(5x+3)^4. \end{aligned}$$

例題. 次の関数を x で微分せよ。

$$y = \sin(x^2+x+1)$$

$f(x) = \sin x, g(x) = x^2+x+1$ とおけば、$f(g(x)) = \sin(x^2+x+1)$ である。

(1) $t = \underbrace{x^2+x+1}_{g(x)}$ と置く。そうすると、

$$y = \underbrace{\sin t}_{f(t)}.$$

(2) 合成関数の微分法より、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= \cos t \cdot (2x+1) \\ &= (2x+1)\cos\left(x^2+x+1\right) \end{aligned}$$

例題. 次の関数を x で微分せよ。

$$y = e^{x^2}$$

$f(x) = e^x, g(x) = x^2$ とおけば、$f(g(x)) = e^{x^2}$ である。

(1) $t = \underbrace{x^2}_{g(x)}$ と置く。そうすると、

$$y = \underbrace{e^t}_{f(t)}.$$

(2) 合成関数の微分法より、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= e^t \cdot 2x \\ &= 2xe^{x^2}. \end{aligned}$$

合成関数の微分法の基本的な使いかたはこんな感じ。たくさんの関数を微分して、必ず完全に習得して欲しい。

5.4　$g(x)$ が一次式の場合

特に、$g(x)$ が 1 次式の場合は、合成関数の微分法によりいつも同じことが起こる。

例題. 次の関数を x で微分せよ。

(1) $y=(3x+7)^5$
(2) $y=e^{2x+1}$
(3) $y=\sin(5x-1)$
(4) $y=\log(10x+2)$

丁寧に計算してみよう。

(1) $f(x)=x^5, g(x)=3x+7$ とすれば、$y=f(g(x))$ となる。$t=3x+7$ とおけば、$y=t^5$ となり、合成関数の微分法により、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=5t^4\cdot 3=\underset{\sim}{3}\cdot 5(3x+7)^4.$$

(2) $f(x)=e^x, g(x)=2x+1$ とすれば、$y=f(g(x))$ となる。$t=2x+1$ とおけば、$y=e^t$ となり、合成関数の微分法により、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^t\cdot 2=\underset{\sim}{2}\cdot e^{2x+1}.$$

(3) $f(x)=\sin x, g(x)=5x-1$ とすれば、$y=f(g(x))$ となる。$t=5x-1$ とおけば、$y=\sin t$ となり、合成関数の微分法により、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\cos t\cdot 5=\underset{\sim}{5}\cdot\cos(5x-1).$$

(4) $f(x)=\log x, g(x)=10x+2$ とすれば、$y=f(g(x))$ となる。$t=10x+2$ とおけば、$y=\log t$ となり、合成関数の微分法により、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\cdot 10=\underset{\sim\sim}{10}\cdot\frac{1}{10x+2}.$$

さて、この結果を並べて眺めてみよう。

$$\left\{\boxed{(3x+7)}^5\right\}'=\underline{3}\cdot 5\boxed{(3x+7)}^4.$$

$$\left\{e^{\boxed{2x+1}}\right\}'=\underline{2}\cdot e^{\boxed{2x+1}}.$$

$$\left\{\sin\boxed{(5x-1)}\right\}'=\underline{5}\cdot\cos\boxed{(5x-1)}.$$

$$\left\{\log\boxed{(10x+2)}\right\}'=\underline{10}\cdot\frac{1}{\boxed{(10x+2)}}.$$

これらをじっと見ると、**共通の法則**が見えてくる。

例えば $y=\cos(2x+1)$ については、

(1) $2x+1$ を**「ひとかたまり（ひとつの文字)」**だと思って、それによって微分する。

$$\underbrace{\cos\boxed{(2x+1)}}_{\cos\boxed{}} \to \underbrace{-\sin\boxed{(2x+1)}}_{\sin\boxed{}}$$

(2) 「ひとかたまり」の中の x の係数をかける。

$$y' = -\utilde{2}\sin\boxed{(2x+1)}. \quad \to \quad \text{微分完了!!}$$

このような「$g(x)$ が一次式の合成関数」については、わざわざ t などという文字を導入するまでもなく、瞬時に答えが出せるようにしたい。

$f(ax+b)$ **の微分**

$$\{\, f(ax+b)\,\}' = af'(ax+b).$$

一旦この章はここで区切っておこう。まずはここまでで「合成関数の基本」は終わり。この章で扱った計算については大変重要度が高いので、必ず演習問題でしっかりと習熟してほしい。必ず!!

5.5　演習問題

1. 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x^2+x+1)^9$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y=e^{-x^3}$

(4) $y=2e^{x^2}+\sin(3x+1)$

(5) $y = \log(x^2 - 1)$

(6) $y = 3\sin 5x + 2\cos x^2$

(7) $y = \sin(\cos x)$

(8) $y = e^{\sin x}$

(9) $y = (e^x + 1)^3$

(10) $y = \log(e^x - \sin x)$

2. 次の関数を微分せよ $\left(\{ f(ax+b) \}' = af'(ax+b)\right.$ を用いて$\left.\right)$

(1) $y = (4x - 9)^{100}$

(2) $y = 3\sin 2x$

(3) $y = e^{-x}$

(4) $y = -e^{3x} + 3\cos 5x$

(5) $y = \sqrt{-x + 2}$

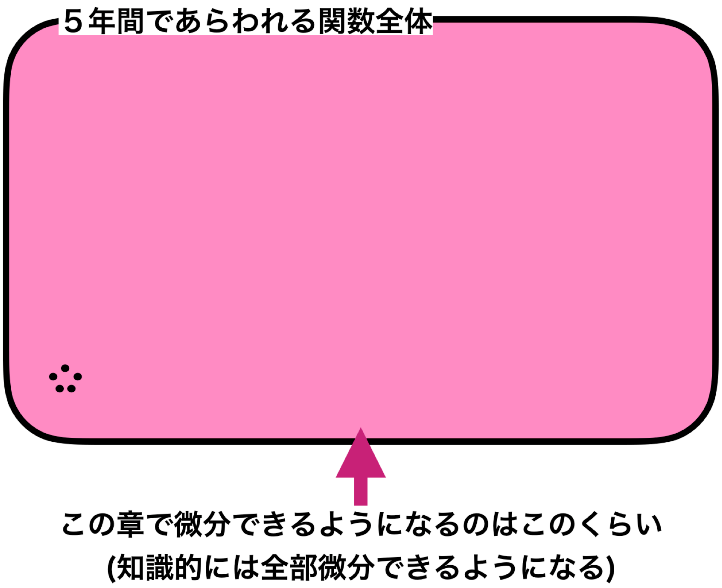
(6) $y = -\log(2x - 2)$

第6章

合成関数の微分法(2)

point

前章が合成関数の微分法の「基本」だとしたら、今回は「応用」について学ぼう。合成関数の微分法を「使いこなせる」ようになると、驚くほどたくさんの公式の導出や、微分計算を自在に行うことができるようになる。そして実は、本章で扱う合成関数の微分法の使い方に習熟できたのならば、少なくとも大学編入くらいで出て来るレベルの関数であれば、理論上はほぼ全て微分出来るというレベルに達することになる。少し難しい内容もあるが、頑張ろう。



6.1　「t で置く」の省略

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = \sin(x^2 + x)$$

ん？これは前章やったのでは？という感じだが、その通り。前章のやりかたをまず振り返ろう。

前章までのやりかた

$t = x^2 + x$ とおくと、$y = \sin t$. 合成関数の微分法より、

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{t\text{ で微分}} \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{t\text{ の微分}} = \underbrace{\cos t}_{t\text{ で微分}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{t\text{ の微分}} = (2x+1)\cos(x^2+x).$$

もちろん、このやりかたは問答無用で完全に正しいのだが、「面倒」である。この章ではこれから、「t でおいて」「t を元に戻す」ことを省略することを試みよう。「t でおく」ということは「ひとつの文字だとみなす」ということ。これがポイント。

$$y = \sin\underbrace{\boxed{(x^2+x)}}_{\substack{\text{ひとつの文字}\\\text{とみなす}}} = \underbrace{\cos\boxed{(x^2+x)}}_{\boxed{}\text{で微分}} \cdot \underbrace{\boxed{x^2+x}'}_{\boxed{}\text{の微分}}$$

$$= \cos(x^2+x) \cdot (2x+1) = (2x+1)\cos(x^2+x).$$

このように、「t で置く」ことを省略して、効率的に合成関数の微分法で計算を行うことができる。何問か練習してみよう。

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = e^{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{\boxed{x^2+1}}}_{\Box\text{で微分}}\underbrace{\boxed{x^2+1}'}_{\Box\text{の微分}} = 2xe^{x^2+1}.$$

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = (x^3+x)^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{10\left(\boxed{x^3+x}\right)^9}_{\Box\text{で微分}}\underbrace{\boxed{x^3+x}'}_{\Box\text{の微分}} = 10(3x^2+1)(x^3+x)^9.$$

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = \log\left(x^2+x+1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{\boxed{x^2+x+1}}}_{\Box\text{で微分}}\underbrace{\boxed{x^2+x+1}'}_{\Box\text{の微分}} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

最終的には、こういうふうに「t でおく」「t をもとに戻す」を省略してスラスラ計算できるようになると、合成関数の微分法の「計算」には完全に習熟したことになる。

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a \text{ は正の定数})$$

この形の微分は、今後いろいろなところで現れる。

$$
\begin{aligned}
y' &= \left\{ (x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\
&= -x(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{x}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}.
\end{aligned}
$$

更に高度な問題にも取り組んでみよう。

6.1.1　入り組んだ微分計算

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = e^{-x}\sin 3x$$

e^{-x} も $\sin 3x$ も「$g(x)$ が一次式」の形になっているので、「微分すると x の係数が前に出てくる」パターンだ。積の微分法則とあわせ技で計算しよう。

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(e^{\boxed{-x}}\right)' \sin 3x + e^{-x}\left(\sin \boxed{3x}\right)' \quad \text{(積の微分法則)} \\
&= -e^{-x}\sin 3x + 3e^{-x}\cos 3x \quad \text{(微分すると } x \text{ の係数が前に出てくる)} \\
&= e^{-x}(3\cos 3x - \sin 3x).
\end{aligned}
$$

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = (x^2+2)^2(3x+1)^3$$

これも「合成関数の微分法」と「積の微分法則」のあわせ技で解決する。合成関数の微

分はやや複雑だが、「t でおく」を省略してザクザクと計算しよう。

$$
\begin{aligned}
y' &= \left\{\, (x^2+2)^2 \,\right\}'(3x+1)^3 + (x^2+2)^2 \left\{\, (3x+1)^3 \,\right\}' \quad \text{(積の微分法則)} \\
&= 4x(x^2+2)(3x+1)^3 + 9(x^2+2)^2(3x+1)^2. \quad \text{(合成関数の微分法でそれぞれの項を微分)} \\
&= (x^2+2)(3x+1)^2 \left\{\, 4x(3x+1) + 9(x^2+x) \,\right\} \\
&= x(x^2+2)(3x+1)^2(21x+13). \quad \text{(整理)}
\end{aligned}
$$

もうお分かりだと思う。このくらい入り組んだ計算になるといちいち「えっと、ここを t でおいて...」なんてことをやっているような場合ではなくなるのだ。「ひとつの文字だと思って微分、そしてその微分をかける」という方法で、瞬時に合成関数の微分を行えるようになること。これが微分計算におけるいわば最大にして最重要の砦なわけである[*1]。

例題. 次の関数を微分せよ。

$$
y = \frac{1}{(3\sin x^2 - 2)^3}
$$

これは「合成関数の微分法」のいわば**「2 段活用」**で計算することが出来る。まず、$y = \frac{1}{(3\sin x^2-2)^3} = (3\sin x^2 - 2)^{-3}$ と変形しておくと、微分計算がしやすくなる。

$$
\begin{aligned}
y' &= \left\{\, (3\sin x^2 - 2)^{-3} \,\right\}' \\
&= -3(3\sin x^2 - 2)^{-4} \cdot (3\sin x^2 - 2)' \quad \text{(合成関数の微分法)} \\
&= -3(3\sin x^2 - 2)^{-4} \cdot 3\cos x^2 \cdot 2x \qquad \text{(さらに合成関数の微分法!!)} \\
&= -18x(3\sin x^2 - 2)^{-4} \cos x^2 \\
&= \frac{-18x\cos x^2}{(3\sin x^2 - 2)^4}
\end{aligned}
$$

[*1] が、難しいところでもあるのが、「あくまで最初に出てきた数式としての合成関数微分法」も忘れないでくれというのが切なる願いだ。

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.
$$

「ひとつの文字だと思って微分、その微分をかけ添える」というのは計算法としては極めて優秀だが、それだけしか知らないと後の「いろいろな式の導出で合成関数の微分法を使う」というのが全くできなくなる。「数式としての理解」と「計算法としての習得」。これをどちらもしっかりと忘れずにいてあげてほしい。

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = e^{\sin x^2}$$

これも **「2 段活用」** で計算できる。サクサク行こう。

$$\begin{aligned}
y' &= \left\{ e^{\sin x^2} \right\}' \\
&= e^{\sin x^2} \cdot \left\{ \sin x^2 \right\}' \\
&= e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\
&= 2x \cos x^2 e^{\sin x^2}
\end{aligned}$$

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = e^{\sqrt{\tan x}}$$

ここまで来ると嫌がらせのようにも見えるが、あくまで「合成関数の微分法を何段もやる」というのが計算のポイント。

$$\begin{aligned}
y' &= e^{\sqrt{\tan x}} \cdot \left\{ \sqrt{\tan x} \right\}' \\
&= e^{\sqrt{\tan x}} \cdot \left\{ (\tan x)^{\frac{1}{2}} \right\}' \\
&= e^{\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{2} (\tan x)^{-\frac{1}{2}} (\tan x)' \\
&= e^{\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \frac{e^{\sqrt{\tan x}}}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}}.
\end{aligned}$$

6.2　対数微分法

合成関数の微分法を使うと、単なる「合成関数」にとどまらない、実にさまざまな関数の導関数を導き出すことが出来る。そのための手法の一つが「対数微分法」である。

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = x^x \quad (x > 0)$$

何とも変態的な形の関数である。しかし、合成関数の微分法を応用することで、導関数を求めることができる。これから紹介する微分の流れはかなり様々な場面で有用なので、「型」として頭に入れておいてほしい。それでは、「対数微分法」の紹介を始めよう。

(1) まず、以下の式をそのまま微分するのはまぁ難しいだろう。とりあえず、**「欲しいのは $\dfrac{dy}{dx}$ である」**ということだけ確認しておこう。

$$y = x^x.$$

(2) しかし、じっくり考えてみると、「あ、x^x って、対数をとると肩の x が降りてきて簡単になるんじゃないか」ということに気づく。というわけで、**両辺の対数をとってみる**。

$$\log y = x \log x$$

(3) そして**両辺を x で微分**する。ここで注意すべきことがある。もとを正せば $y = x^x$ (y は x の関数!!) だったのだから、左辺の $\log y$ は、合成関数の微分法で以下のように微分できるのだ。

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{\substack{\text{まず} \\ y\ \text{で微分}}} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\substack{y\ \text{を} \\ x\ \text{で微分}}}.$$

「欲しかった $\frac{dy}{dx}$ がうまいこと現れている」ことに気づくだろう。これがミソ!! よって、両辺を x で微分した結果は、

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1 \quad \text{(右辺は積の微分法則で微分した)}$$

(4) 我々が欲しかったのは $\frac{dy}{dx}$ だったので、両辺に y をかけると、

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1).$$

y をもとに戻せば、

$$\frac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1).$$

導関数を求めることができた!! これが**対数微分法**という手法である。

例題. 次の関数を微分せよ。

$$y = (\cos x)^{e^x} \quad (\cos x > 0)$$

これまたすごい形の関数だが、対数微分法を用いれば導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求められる。

(1) 両辺の対数をとる。

$$\log y = e^x \log(\cos x).$$

(2) 両辺を x で微分する。

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x \log(\cos x) + e^x \underbrace{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}_{\text{合成関数の微分法で微分!!}}$$

(3) 両辺に y をかける。

$$\frac{dy}{dx} = y \left\{ e^x \left(\log(\cos x) - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \right\}.$$

y をもとに戻して整理すると、

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^{e^x} \left\{ e^x (\log(\cos x) - \tan x) \right\}.$$

6.3 逆関数の導関数

「なにかの逆関数」の導関数が欲しいときも、合成関数の微分法が役に立つ。

例題. 対数関数の微分公式を導出せよ。

$$y = \log x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

たとえば、この「対数関数の微分公式」は合成関数の微分法を利用すると簡単に「導出」を行うことができる。第 3 章で行った「微分の定義に基づく導出」よりも圧倒的に簡単にだ。そしてその方法は、どんな「逆関数」の微分にも応用できる。この流れも非常に重要な流れなので、必ずおさえておいてほしい。

(1) $y = \log x$。両辺の指数関数をとると、

$$e^y = x.$$

右辺は「対数の指数」なので、逆関数の関係より「もとに戻った」。

(2) 両辺を x で微分する。左辺は合成関数の微分法により、

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1.$$

(3) 両辺を e^y で割ると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad (e^y = x \text{ だったので}).$$

このように、導関数の公式が導出できた。

6.3.1　逆三角関数の微分公式

例題. 逆正弦関数の導関数を計算せよ。

$$y = \sin^{-1} x.$$

$\sin^{-1} x$ は、$\sin x$ の逆関数だ。「あーくさいん」と読む。これも、全く同じ流れで導関数が求められる。

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1} x \\ \sin y &= x. \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}. \end{aligned}$$

ところで、$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$ なので、$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ である。よって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

例題. 逆正接関数の導関数を計算せよ。

$$y = \tan^{-1} x.$$

これも全く同じ流れで求められる。

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1} x \\ \tan y &= x \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y. \end{aligned}$$

ところで、$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ だったので、$\cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ である。よって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\cos^{-1} x$ の導関数も、全く同様に求めることができる。以上をまとめておこう。

逆三角関数の微分公式

$$\begin{aligned} (\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\cos^{-1} x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

高専の授業で、これらの公式をすべて「はぁーい暗記してくださいねぇー」と先生から突然指示され、一生懸命「あーくさんいのびぶんはるーといちひくえっくすにじょうぶんのいち... あーくさいんのびぶんは...」なんて復唱をしてテスト前だけは何とか丸暗記するものの、すぐに忘れてまた突然現れたときには全く覚えていない... なんて学生を僕は数え切れないほど見てきた。しかし、この「逆関数の導関数を求める方法」に一回習熟してしまえば、もはやこれらの公式を躍起になって暗記しようなんて思う必要はないだろう。覚えられたらそれで良いのだし、忘れてしまったとしたら、さくっと導出をすれば良いのだか

ら。ちなみに高専の教科書にはおそらく「逆関数の微分公式」

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

というのが載っているが、いま紹介した逆関数の微分の微分の手法を理解出来ているのなら、この公式は完全無視して構わない。

6.4 まぁ、こんなところでしょう

合成関数の微分法の応用のしかたを長々と解説してきたわけだが、基本的にはこれで、どんな関数でもあっても（知識的には）微分することが可能になった、と言ってもいいだろう（少なくとも高専、大学編入レベルで出てくる関数については)。あとは、ひたすらに手を動かして、しっかりと「微分感覚」を血肉にするのみ。いわば「微分の筋トレ」が必要なわけだ。

僕による「解説」と、読者の君による「練習」は、いわば「車の両輪」。「解説」だけで満足して「練習」を全然しない学生というのはまぁ、多いのだが、それでは微分が出来るようには絶対にならない。僕は練習のしかたを君に教えることが出来ても、君の代わりに計算練習をすることは出来ないのだから。君の努力によって「両輪」が揃ってはじめて、君は微分の習熟に向けて走り始めることが出来るのだ。いつものように章末に演習問題を収録したので、この章の内容を理解し、そして計算に慣れ、その状態で「微分を使いこなす」という新たなフィールドに、一緒に進んで行こう。まずはここまで、お疲れ様でした!!

6.5 演習問題

(1) 次の関数を微分せよ。

(i) $y = (4x^2 + x)^2$

(ii) $y = x^2(x^2 + x)^3$

(iii) $y = \log(\cos x)$

(iv) $y = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

(v) $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$

(vi) $y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log(x + \sqrt{x^2+a^2})\right)$

(2) $y = (\sin x)^{\cos x}$ の導関数を求めよ。

(3) $y = \cos^{-1} x$ の導関数を求めよ。

(4) $x = y^2 + 4y - 1$ のとき、$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

第7章

付録

本編で割愛した証明や解説などはこの付録にまとめた。

7.1 積の微分法則の証明

積の微分法則

$$\Bigg\{\underbrace{f(x)g(x)}_{\substack{f(x)\text{ と }g(x)\\ \text{の積}}}\Bigg\}' = \underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}\underbrace{g(x)}_{\text{しない}} + \underbrace{f(x)}_{\text{しない}}\underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}.$$

微分の定義より、

$$\begin{aligned}\{\, f(x)g(x)\,\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}\underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)}+\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)}g(x)\right]\\ &= g'(x)f(x)+f'(x)g(x).\end{aligned}$$

以上により示された。

7.2　商の微分法則の証明

商の微分法則

$$\Bigg\{\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{f(x)\text{ と }g(x)\\\text{の商}}}\Bigg\}' = \frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{ビブン}}\overbrace{g(x)}^{\text{しない}} - \overbrace{f(x)}^{\text{しない}}\overbrace{g'(x)}^{\text{ビブン}}}{\underbrace{\{\,g(x)\,\}^2}_{\substack{\text{分母の}\\2\text{ 乗}}}}$$

微分の定義より、

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)-\{\,f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\,\}}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\left(\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)}g(x)-f(x)\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}\right)\frac{1}{\underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)}g(x)}\right]\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{\,g(x)\,\}^2}.
\end{aligned}$$

以上により示された。ちなみに、合成関数の微分法を用いれば、以下のように比較的簡単

に証明することができる。

$$
\begin{aligned}
\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' &= \Big[f(x) \cdot \{\, g(x)\,\}^{-1} \Big]' \\
&= f'(x)\,\{\, g(x)\,\}^{-1} + f(x)\,\underbrace{(-1)\,\{\, g(x)\,\}^{-2}\, g'(x)}_{\substack{[\{\, g(x)\,\}^{-1}]' \\ (\text{合成関数の微分法})}} \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{\{\, g(x)\,\}^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{\, g(x)\,\}^2}
\end{aligned}
$$