暗記しない微分積分

大学編入のための数学講座

講師 明松 真司

ナレッジスターサテライト

http://know-star.com/

目次

はじめに

高専で数学をやっていれば，最も長く，深い付き合いになるのが「微分積分学」でしょう．もちろん，大学編入試験でも，微分積分の問題が出題される確率は，ほぼ 100% と言っても良いのではないでしょうか．試験科目に数学がある大学であれば，微分積分学の問題が出題されないことはほぼあり得ないです．

微分積分がこれほどまでに重要視される理由は，やはり工学や物理学の多くが，微分積分学をベースにして記述されるからでしょう．高専での数学，大学編入試験のみならず，大学での数学，研究活動でも微分積分学はいたるところで姿を表します．

しかしながら，「微分積分が苦手」だという学生も数多く見かけます．そして，そういう学生が必ず言うのが，次の言葉です．

「微分積分は公式が覚えられない!!」

でも，「公式が覚えられないから，微分積分が出来ない！」ともしあなたが思っているならば，それは大きな誤解をしています．**微分積分は「公式を暗記しないと理解できない」ものではありません**．

この授業を通じて僕が伝えたいことは，次の 1 言に集約されます．

「暗記から導出へ」

つまり，**公式を手当たり次第に「暗記」してはいけない，公式を必要に応じて「導出」出来るようになりなさい**，ということ．

「公式を何でも暗記するんじゃない」と学生さんに言うと，驚かれることが多いです．小学校で算数を習いはじめたときから，中学校，そして高専での今までの数学で，「公式の暗記」を繰り返してきたのでしょう．そして，それこそが数学だ！と信じているのでしょう．しかし，あなたは歴史の勉強してるわけじゃないんですから，年号覚えるみたいに語呂合わせで公式覚えるのなんて狂気の沙汰です．そんなもの，数学でもなんでもない．それが嫌で「数学が嫌いだ！」と言っているのなら，それは「数学嫌い」でもなんでもありません．ただの**「暗記嫌い」**です．

僕は「暗記」が嫌いです．だから数学が好きで，数学をやっています．数学が「公式の暗記」の繰り返しだと思ったら大間違い．本当の数学は「いかに少数の基本法則から，あらゆることを導き出すか」というのが，一大テーマなのです．暗記は少なければ少ないほど良い．僕はそう考えています．

例えば微分公式，積分公式，それに加えて三角関数，指数関数，対数関数などの膨大な数の性質... こんなの，全部暗記なんて僕も出来ませんよ．出来るわけがない．もしあなたがそれで悩んでいるのならば，それは全く悩む必要などありません．

手当たり次第の「暗記」など，**しなくて良い**のです．むしろ，**してはいけない**．本当の「数学」を，一度きちっと学んでみましょう．もしかしたら驚くことも，今までと違う！と思うこともあるかもしれませんが，きっと，こっちのほうが楽しいと思っていただけると思います．そして，数学の本当の学び方，楽しみ方というのはこっちのほうなんです．正しい数学を，正しく学びましょう．そして，数学を「楽しんで」みましょう．

学校教育にずっしりと陰を落としている，「丸暗記至上主義」に，あなただけは，騙されちゃダメだよ．

ナレッジスター 代表 明松 真司

http://know-star.com/

第 1 章

覚えておくべき微分のこと

我々は**「九九」を暗記しています**．そして，九九の暗記によって瞬時に可能になる「1 桁× 1 桁」の掛け算は，日常生活の至る所で，途轍もない活躍を見せます．

我々は**「2 桁× 2 桁」「3 桁× 3 桁」の掛け算の暗記をしません**．なぜなら，「筆算」と「九九」ですぐに計算出来てしまうからです．

微分積分も，実はこれと同じです．何が言いたいかというと...

- 「暗記しておくべき最低限の公式」は覚えておいて，
  瞬時に使えるようにするべし（九九）．
- 「最低限のことからすぐに導ける公式」は，
  暗記などするべからず（2 桁× 2 桁，3 桁× 3 桁...）．

2 桁× 2 桁の掛け算全部暗記してる人が仮にいたとしたら，「えーなんでこの人，こんなの暗記してるんだろう．筆算でやれば一発じゃん...」って，思うでしょう．僕は結構，微分積分の公式を手当たり次第に暗記しようとしている学生を見て，同じようなことを思っています．

ということで，まずみなさんには，**「暗記すべき最低限の公式」**を身につけてもらいたいと思います．**微分積分学においては，基本中の基本のような公式と法則たちです．数もそれほど多くありません．**なので，必ずこれらに関しては，何も考えずにすぱっと使えるくらいまで慣れ親しんでほしいです．

1.1 微分の定義

まず，関数 $y = f(x)$ の**導関数** $\frac{dy}{dx}$ を次のように定義します．

$$\frac{dy}{dx} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

これを省略して $f'(x)$ と書くことが多いです．関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを，$y = f(x)$ を**微分する**といいます．

一応，これは微分のテキストなので，微分の定義を「お約束」として書きました．が，このテキストの目的はあくまで**「今まで暗記で済ませていた微分計算を，暗記を使わずに出来るようになる」**ことなので，この定義についてはあんまり深入りしませんし，皆さんもあまり気にしなくて良いです[*1]．

1.2　微分の線形性

微分は，次の**線形性 (linearity)** という性質があります．

$$\{af(x) + bg(x)\}' = af'(x) + bg'(x).$$

これはつまり，**足し算は分けて，係数は前にだして，それぞれ微分すればいいですよ**ということ．なので，複雑な式でも，線形性を使えば「それぞれの部分を微分」すれば良いので，簡単な微分に帰着できます．

1.3　x^n の微分

この章では，「微分しろ！」と言われたら，ほぼ反射的にスパッと微分が出来て欲しい関数の微分公式をいくつか列挙します．この章で出てくる微分公式は，「暗記しておくべき最低限の公式」たちです．

「右肩下がり左降りの法則」

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

x^3, x^5 のような関数を微分するときは

- 右肩に乗っている数を左におろして (左降り).
- 右肩を -1 する (右肩下がり).

*1 **「微分の定義はどうでもいい」と言っているわけではありません．**微分のすべてはここから始まるので，めちゃくちゃ大切なんです．しかし，あくまで編入試験や定期試験では，重視されるのは「定義」ではなく「計算」です．

このテキストで「定義」からかっちり説明してしまったら，巷のテキストと変わらなくなってしまうので，あえてこのテキストでは説明しません．ということです．

というのがこの公式．$x^{-1}, x^{\frac{1}{3}}$ のように，肩に乗っている数は何でも OK.

「定数は微分するとゼロ」

$$(C)' = 0.$$

例 1. 次の関数を微分しなさい．

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

$(x^n)' = nx^{n-1}, (C)' = 0$ と，線形性を使います．

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 - 3x + 1)' \\ &= 2(x^2)' - 3(x)' + (1)' \\ &= 2 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 4x - 3. \end{aligned}$$

例 2. 次の関数を微分しなさい．

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}.$$

全て $x^{\square}$ の形に直して，$(x^n)' = nx^{n-1}$ と線形性を使いましょう．

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}. \\ &= x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}} \\ y' &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

1.4　e^x の微分

底が **Napier 数** $e = 2.71828...$ であるような指数関数は，最も美しい微分公式を持つ関数です．

「微分してもかわらない」

$$(e^x)' = e^x.$$

1.5　$\sin x, \cos x$ の微分

三角関数の微分は，cos と sin がぐるぐるぐるぐる．

「cos と sin がぐるぐる」

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x.$$

1.6　自然対数の微分

底が e であるような対数 $\log_e x$ を，**自然対数**といいます．自然対数は数学できわめてよく使うので，$\log_e x$ のことを底を省略して $\log x$ と書きます．

「微分すると急に簡単に」

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

微分において，**「暗記」すべき「関数の微分公式」**はこのくらいです．改めて列挙しておくと...

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= nx^{n-1} \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(e^x)' &= e^x \\
(\log x)' &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

これらの公式については，**「九九を覚えるようなもの」**だと思って，是非頭に叩き込んで欲しいと思います．しかし，あなたはもしかしたら，

「学校で覚えろと言われた微分の公式って，もっとたくさんあった気がする...」

と今思っているかもしれません．が，今挙げたこれら以外の「関数の微分公式」を暗記する必要は, 今後もうありません.

ちなみに,「微分の定義」の意味や，これらの公式の証明は，**巻末の付録**で詳しく解説してあります.

1.7　積の微分法則

「暗記」をしなければならない関数の微分公式については，列挙し終えました．次は，「暗記」しておくべき**「微分法則」**を 3 つほど挙げましょう．

何らかの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積によって作られる関数は，**積の微分法則**を使って微分できます[*2].

「ビブン・しない・しない・ビブン」

$$\{ f(x)g(x) \}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

[*2] 間違っても「それぞれビブン」はしちゃダメです.

$$\{ f(x)g(x) \}' = f'(x)g'(x) \text{ はダメ!!}$$

微分積分学をやる上で名前を聞かないことはあり得ないであろうかの有名な数学者「ライプニッツ」は，この間違いをしばらくしていたらしい．気をつけよう.

覚え方は **「ビブン・しない・しない・ビブン」**.

$$\underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}\underbrace{g(x)}_{\text{しない}}+\underbrace{f(x)}_{\text{しない}}\underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}$$

例 3. 次の関数を微分しなさい.

$$y = x\log x.$$

「知ってる関数の積だ!!」 と気づけば，積の微分法則を使ってさくっと微分できます.

$$\begin{aligned}
y &= \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\log x}_{g(x)}\\
y' &= \underbrace{(x)'}_{\text{ビブン}}\underbrace{\log x}_{\text{しない}}+\underbrace{x}_{\text{しない}}\underbrace{(\log x)'}_{\text{ビブン}}\\
&= 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1.
\end{aligned}$$

例 4. 次の関数を微分しなさい.

$$y = e^x\sin x.$$

何か難しそうな関数ですが，これも「知ってる関数 e^x と $\sin x$ の積」に過ぎないのです.

$$\begin{aligned}
y &= \underbrace{e^x}_{f(x)}\underbrace{\sin x}_{g(x)}\\
y' &= \underbrace{(e^x)'}_{\text{ビブン}}\underbrace{\sin x}_{\text{しない}}+\underbrace{e^x}_{\text{しない}}\underbrace{(\sin x)'}_{\text{ビブン}}\\
&= e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x+\cos x).
\end{aligned}$$

例 5. 次の関数を微分しなさい．

$$y = x\sin x\cos x.$$

おや，この問題は今までと様子が異なりますね．

$$x, \sin x, \cos x$$

という，「3 つの関数の積」になっています．しかし我々は「2 つの関数の積」の微分法則しか知りません．でも大丈夫，3 つの関数の積の微分のやりかたなんて，導いちゃえばいいのです．

ということで，**3 つの関数の積**の微分の法則を**導出**してみましょう．ポイントは「$f(x)g(x)$ と $h(x)$ の積」だと考えること．

$$\begin{aligned}
\{\,f(x)g(x)h(x)\,\}' &= \underbrace{\{\,f(x)g(x)\,\}'}_{\text{ビブン}}\underbrace{h(x)}_{\text{しない}} + \underbrace{f(x)g(x)}_{\text{しない}}\underbrace{h'(x)}_{\text{ビブン}} \\
&= \{\,\underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}\underbrace{g(x)}_{\text{しない}} + \underbrace{f(x)}_{\text{しない}}\underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}\,\}\,h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
&= \underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}g(x)h(x) + f(x)\underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}h(x) + f(x)g(x)\underbrace{h'(x)}_{\text{ビブン}}.
\end{aligned}$$

「3 つの積の微分法則」

$$\{\,f(x)g(x)h(x)\,\}' = \underbrace{f'(x)}_{\text{ビブン}}g(x)h(x) + f(x)\underbrace{g'(x)}_{\text{ビブン}}h(x) + f(x)g(x)\underbrace{h'(x)}_{\text{ビブン}}.$$

ということで，新たな公式を導くことができたので，これを使って微分をさくっと終わらせましょう．

$$\begin{aligned}
y' &= \underbrace{(x)'}_{\text{ビブン}}\sin x\cos x + x\underbrace{(\sin x)'}_{\text{ビブン}}\cos x + x\sin x\underbrace{(\cos x)'}_{\text{ビブン}} \\
&= \sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x.
\end{aligned}$$

はい，完了です．

今何気なく**「この問題を解くには，3 つの積の微分法則が必要だな」**と考えて，実際に「3 つの積の微分法則」を導きました．これが僕がしきりに言っている**公式の導出**です．あなたにできるようになって欲しいのは，コレです．

この発想がない人って結構多いです．「公式がなければ導出すればいいじゃない」という発想がない人は，

「3 つの積の微分のやりかたなんて習ってないよ!! 無理!!」

と言ってこの問題のさじを投げます．しかし，「必要だから導こう」という考えに至れる人であれば，その場でさくっと公式を作って（導出して），こういう風に問題を解くことができるわけです．どっちが強いか？一目瞭然でしょう．

1.8　商の微分法則

関数の「商」については，**「商の微分法則」**を使って微分します．

「分母の 2 乗ぶんのビブン・しない・しない・ビブン」

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{\, g(x) \,\}^2}.$$

分子の真ん中の符号が「マイナス」であることに注意してください．

例 6. 次の関数を微分しなさい．

$$y = \frac{2x+1}{x^2+3}.$$

商の微分法則を使います．

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(2x+1)'(x^2+3)-(2x+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{2(x^2+3)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{2x^2+6-4x^2-2x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}
$$

分母の 2 乗は，よっぽど計算をしやすいとき以外はそっとしておくことが多いです．

例 7. 次の微分公式を証明しなさい．

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

暗記しておくべき三角関数の微分公式として，$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ の 2 つを紹介しましたが，なぜ tan の微分公式には触れないんだ？と疑問に思っていた方もいると思います．

学校で微分積分を習うときには，$\tan x$ の微分公式をほぼ確実に暗記させられます．そして，**実際に tan の微分公式は最終的に覚えて欲しい**のです．ただ，**「丸暗記」はやめましょう**．なぜなら，tan の微分公式の導出は簡単だからです．やってみましょう．$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を思い出します．

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'.$$

商の微分法則を使って微分すると，

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ なので，

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

これで導出は完了です．

1.8.1 公式の「正しい覚え方」

この「tan の微分公式」は，覚えて欲しいんです．$\tan x$ を微分しろ！と言われた瞬間に，一瞬で微分できるくらい，しっかり頭に定着させて欲しいんです．しかし，**「たんじぇんとのびぶんはこさいんにじょうぶんのいち... たんじぇんとのびぶんはこさいんにじょうぶんのいち...」暗唱して丸暗記をするくらいだったら，覚えないほうがマシ**です．

公式というのは，最低限やむを得ないものを除いて，**歴史の年号のような覚え方をしてはいけません**．なぜなら，そこには以下に挙げるような危険が付き物だからです．

- 単純に効率が悪い（脈絡の分かっていない記号の列を暗記することは非常に難しい）．
- 人間の脳が覚えられる公式の数には限界がある．その限界を超えると，人間はいくつかの公式を忘れ始めてしまう．
- 忘れた公式がたまたま試験で出題されてしまうと，その時点で何もできなくなってしまう．

では，どうすれば良いのでしょう？**公式の「覚え方」を見直しましょう**．公式というのは，以下のような流れで覚えるのが「正しい覚え方」です．

1. まずは公式の「導出」を (ゆっくりで良いので) 出来るようになる．
2. 最初のうちは，公式が必要になる都度「導出」を行う．繰り返すうちにだんだん「導出」に慣れてきて，「導出」が早く出来るようになる．
3. さらにそれを繰り返しているうちに，頭のなかで導出の流れが一瞬で再現できるようになる．すると，**「公式の導出が頭のなかですぐに終わり，一瞬で公式が書ける」**という状態になる．この段階になれば，**公式は完全に頭に定着している**．

学生にこの話をすると，**「そんな高度なこと出来るわけがない」**という返答をされることが多いです．しかし，僕は**間違いなくこっちのほうが簡単であり，かつ，本質的な数学を楽しめる**と思っています．しかも，この方法には大きなメリットがあります．

それは，**万が一公式がさらっと思い出せなくなったとしても，もう一度丁寧な導出に戻れば公式を復元できる**こと．「公式を忘れたらどうしよう... 必要な公式を試験で思い出せなかったらどうしよう...」というプレッシャーから開放されて本番に臨めるということは，**途轍もないアドバンテージ**です．このテキストでは，この方針を常に徹底して，さまざまな公式を取り上げて行きます．**丸暗記から，こうやって脱却して行きましょう**．

1.9　合成関数の微分法

たとえば，次の関数を考えましょう．

$$y = (2x+1)^7.$$

この関数の微分をするには，次のような方法が考えられます．

(i) 7 乗を気合で展開.
(ii) 各項を微分.

しかし，まずもって我々は 7 乗の展開なんてしたくありません．ちなみに，実際に展開してみた結果は以下のとおり．

$$y = 128\,x^7 + 448\,x^6 + 672\,x^5 + 560\,x^4 + 280\,x^3 + 84\,x^2 + 14\,x + 1$$

微分した結果は以下のとおり．

$$y' = 896\,x^6 + 2688\,x^5 + 3360\,x^4 + 2240\,x^3 + 840\,x^2 + 168\,x + 14$$

これを手計算でやるのは，あまりにもしんどいです．そこで，次のように考えればきちっと微分ができるんですよというのが，**合成関数の微分法**という微分法則．

(1) まず，$2x+1$ を「ひとかたまり」と見ることを考えます．なので，$u = 2x+1$ と置いてみることにしましょう．

$$y = \Bigg(\underbrace{\boxed{2x+1}}_{u\text{ とおく}}\Bigg)^7$$

すると，与えられた関数は次のように表せます．

$$y = u^7.$$

(2) すると，「y を u **で微分するのは簡単だ!!**」ということに気づきます．実際にこれを u で微分してみると，

$$\frac{dy}{du} = 7u^6.$$

(3) しかし，我々が欲しかったのは $\frac{dy}{du}$ ではなく $\frac{dy}{dx}$ です．が，実は，これに **「かたまり** (u) **の微分」** すなわち $\frac{du}{dx} = (2x+1)' = 2$ をかけると，求めたかった $y' = \frac{dy}{dx}$ が求められるのです．

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 7u^6 \cdot 2 = 14u^6 = 14(2x+1)^6.$$

これで微分はオシマイです．こっちのほうが，明らかに簡単ですね．

「u でビブン× u のビブン」

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{du}}_{\text{「}u\text{ で微分」}} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{「}u\text{ の微分」}} .$$

例 8. 次の関数を微分しなさい．

$$y = e^{2x+3}.$$

合成関数の微分法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

でさくっと微分をしてしまいます．$u = 2x + 3$ と置くと，$y = e^u$ です．これを u で微分するのは簡単で，

$$\frac{dy}{du} = e^u.$$

さらに，

$$\frac{du}{dx} = 2.$$

よって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot 2 = 2e^{2x+3}.$$

例 9. 次の関数を微分しなさい．

$$y = \sin(4x + 1)$$

$u = 4x + 1$ とおくと，$y = \sin u$ なので，

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

また，

$$\frac{du}{dx} = 4.$$

あとは，合成関数の微分法により，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \cdot 4 = 4\cos(4x+1).$$

例 10. 次の関数を微分しなさい．

$$y = \log(3x-5)$$

$u = 3x - 5$ とおくと，$y = \log u$ なので，

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}.$$

また，

$$\frac{du}{dx} = 3.$$

あとは，合成関数の微分法により，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{3}{3x-5}.$$

ほほぅ，なるほどなるほど．今までの微分の結果を列挙してみましょう．

$$\begin{aligned} \left(e^{2x+3}\right)' &= 2e^{2x+3} \\ \{\sin(4x+1)\}' &= 4\cos(4x+1) \\ \{\log(3x-5)\}' &= \frac{3}{3x-5}. \end{aligned}$$

結局，$u = px + q$(一次式) だったら，微分は次のように出来ることが分かります．

$$\left(e^{px+q}\right)' = \underbrace{p}_{\text{前に出る}} \underbrace{e^{\boxed{px+q}}}_{\text{まるごと微分}}$$

$$\{\sin(px+q)\}' = \underbrace{p}_{\text{前に出る}} \underbrace{\cos\boxed{(px+q)}}_{\text{まるごと微分}}$$

$$\{\log(px+q)\}' = \underbrace{p}_{\text{前に出る}} \underbrace{\frac{1}{\boxed{px+q}}}_{\text{まるごと微分}}$$

「まるっと微分，x の係数は前に出る」

$$\{\, f(px+q)\,\}' = pf'(px+q).$$

たとえば，次のように「u でおく」のプロセスを省略し，簡単に微分が出来ます．

$$\{\cos(3x+7)\}' = 3\{-\sin(3x+7)\} = -3\sin(3x+7).$$
$$\{\tan(5x)\}' = 5\cdot\frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$
$$\left(e^{-3x+1}\right)' = -3e^{-3x+1}.$$

ただし，間違っても **「$f(px+q) = pf(px+q)$ だな!!暗記しよう!!」** というのは駄目です．丸暗記をするくらいなら，毎回「u で置いて，u で微分× u の微分... 」を繰り返している方がよほどマシです．

この結果はあくまで **「合成関数の微分法を使う上で，あまりにもよく $f(px+q)$ という形の微分が出てくるので，毎回頭を使って考えずとも，当たり前のようにサクッと "u でおく" プロセスを省略して微分ができるようになった」** というものに過ぎません．間違っても，暗唱して丸暗記するようなものではないのです．

例 11. 次の関数を微分しなさい．

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

- 真面目に u でおく．
  $u = x^2+1$ とおくと，$y = \frac{1}{u} = u^{-1}$．
  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -u^{-2}\cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$
- いちいち u でおくのをサボる．
  x^2+1 をひとかたまり (箱) だと思う (u でおくのと実質的におなじ).
  $$y = \frac{1}{\boxed{x^2+1}} = \left(\boxed{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$y' = \underbrace{-\left(\boxed{x^2+1}\right)^{-2}}_{\text{箱で微分}\left(\frac{dy}{d\square}=\frac{dy}{du}\right)} \cdot \underbrace{\boxed{x^2+1}'}_{\text{箱の微分}\left(\frac{d\square}{dx}=\frac{du}{dx}\right)}$$
$$= -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

徐々に徐々に，こっちの「u で置くのをサボる」方法を，頭を使わずにサクッと出来るようになって行きましょう.

例 12. 次の関数を微分しなさい.

$$y = \sin\{\cos(\tan x)\}$$

いちいち u で置くのをサボってサクサクと微分して行きます.

$$y = \sin\left\{\boxed{\cos(\tan x)}\right\}$$
$$y' = \underbrace{\cos\left\{\boxed{\cos(\tan x)}\right\}}_{\text{箱で微分}} \cdot \underbrace{\boxed{\cos(\tan x)}'}_{\text{箱の微分}}$$

今度は，$\cos(\tan x)'$ を求めます.

$$\left(\cos\boxed{(\tan x)}\right)' = \underbrace{-\sin\boxed{(\tan x)}}_{\text{箱で微分}} \cdot \underbrace{\boxed{(\tan x)}'}_{\text{箱を微分}} = -\frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x}$$

あとは，これを最初の式に代入します.

$$y' = -\frac{\cos\{\cos(\tan x)\}\sin(\tan x)}{\cos^2 x}$$

このように，**合成関数の微分法を何重にも適用して微分する**ようなことも重要です.

1.9.1　複雑な問題を「小さな問題に帰着（分割）」するという考え方

複雑な数学の問題を解くときにきわめて重要なのが，

複雑な問題を「小さな問題に帰着（分割）」する

という視点です．事実，先ほどの $y = \sin\{\cos(\tan x)\}$ の微分でも，そのような視点を持てるかどうかで，なんだかよく分からなくなって**「混乱」**をしてしまうか，落ち着いて解けるかが決まってきます.

この関数の微分は，けっこう複雑で難易度の高い問題だと言えるでしょう．しかし，次のように「小さな問題の組み合わせ」だと考えれば，落ち着いてひとつひとつのステップを処理して行くことで解けてしまうわけです．

(1) $\sin\Box$ の微分．
(2) $\cos\Box$ の微分．
(3) $\tan x$ の微分．
(4) 適切に結果を代入する．

1.10　この章のまとめ

以上で，**最低限「暗記」して使いこなせるようになって欲しい微分公式と，微分法則**を解説するのは終わりです．あらためて，以下にまとめて列挙しておきましょう．

微分公式

- $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- $(e^x)' = e^x$.
- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$.

微分法則

- $\{ f(x)g(x) \}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{ g(x) \}^2}$.
- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.（箱で微分×箱の微分）

微分に関する「暗記」をしてもらいたい事柄は，ここに挙げたものだけであり，これ以外のほとんどの微分計算は，これらと基礎数学の知識の**組み合わせ**で解決できます．

このテキストのこれからの話題は，**「これらの知識と，基礎数学の知識を組み合わせて，あらゆる関数を“暗記に頼らず”微分する」**ということに集約されます．このテキストの読者の中には，高専や大学で微分積分学を一度習ったことがある（あるいは，習っている途中である）という方も多いと思いますが，

「あれ？学校で逆三角関数の微分とか習った気がするけど，やらなくていいの？」

「あれ？学校で一般の底の指数，対数の微分とかも習った気が...」

などともしかしたら考えているかもしれません．しかし，**これらの問題は，すべて今まで解説してきた微分に関する知識＋基礎数学の知識で解決します**．

これからこのテキストでその流れを体感し，納得し，そして「暗記に頼らない本質的な理解」にたどり着いて欲しいと思います．

ここからいよいよ，「ホントの数学」が始まるというわけです．Good Luck!!

第 2 章

指数関数と対数関数の微分

指数関数と対数関数について，すでに伝えてある微分公式は以下の 2 つだけです．

$$(e^x)' = e^x, (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

2.1 一般の底の指数関数の微分

指数関数と対数関数は互いに**逆関数**という関係にあります[*1]

[*1] **逆関数**については，基礎数学で学ぶ事項なので，解説は脚注に留めます．$y = f(x)$ という関数があるとき，x に対して y がただひとつ定まる．さらに，y を与えたときに x がただひとつ定まるときに，x は y の関数となり，それを $x = g(y)$ と表すことにする．これを $y = g(x)$ と書き直し，$f(x)$ の逆関数と呼び，$g(x)$ を $f^{-1}(x)$ と表すことにする．これが逆関数の定義です．

しかし，この定義だけだと何がなんやらと思う人がいるかもしれませんので，簡単に噛み砕いて説明をします．関数 $y = f(x)$ というのは，**x を与えたとき，x にただひとつの y を対応させる規則**と考えることが出来ます．

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow y$$

これに対して，**y から x をただひとつ復元するルール**が，$f(x)$ の**逆関数**です．つまり，「y を与えたら，$y = f(x)$ で変換される前の x を復元してくれる」ようなルールのこと．

$$y \longrightarrow g(y) \longrightarrow x$$

y を与えてごにょごにょして x が出てくるというこのルールは，$x = g(y)$ と表すことができます．が，文字なんて別になんでもいいので，$y = g(x)$ と書きなおして，これを $f^{-1}(x)$ と書くことに決めて，f の逆関数と呼ぶことにしようということです．

逆関数に関して重要なことがあります．それは，**いつでも逆関数が定義できるとは限らない**ということ．しかも，我々が知っている簡単な関数でも，逆関数を定義できないことはよくあるのです．例えば，

$$y = x^2$$

すなわち，次のようなことが言えるわけです．

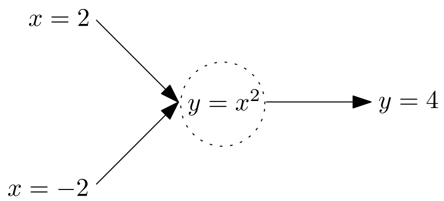
$$x \quad \xrightarrow{\text{まず対数}} \quad \log x \quad \xrightarrow{\text{そして指数}} \quad \underbrace{e^{\log x} = x}_{\text{逆関数なんだから元に戻る!!}}$$

このように，どんな数 x でも，$x = e^{\log x}$ と捉えることによって**「e の肩に無理やり乗っ**

は，逆関数が定義できません．その理由を簡単に説明するために，$x = \pm 2$ から $y = x^2$ で y を計算してみます．すると，

$$y = 2^2 = 4,\ y = (-2)^2 = 4.$$

と，どちらの x にも「$y = 4$」という値に対応することが分かります．



で，逆関数というのは「y から x をただひとつ復元する」ようなルールのことでした．しかし，この $y = 4$ って，「ただひとつ」に復元できますかね？ということなのです．ほら，「$y = 4$ は，$x = 2$ **に復元すれば良いのか，**$x = -2$ **に復元すれば良いのかが分からない**」のです．「ただひとつ」の値を対応させることは，関数としての絶対条件なので，**逆関数は定義できない**と，こういう流れなのです．

ちなみに，$y = x^2$ はいま述べたようにこのままだと逆関数を定義できないのですが，次のように x の範囲 (定義域) を制限すると，逆関数が定義できます．

$$y = x^2 \quad (x \geqq 0)$$

このようにすれば，**「x として負の数は考えない」**ことになります．なので，先ほどの例でいえば，4 は 2 に復元すれば良いんだ!! と，ちゃんと復元先がただ 1 つに定まってくれるのです．

以上のことを踏まえて，「関数 $y = f(x)$ に逆関数が定義できる条件」を述べておきます．結局，「復元先がただ 1 つに定まってほしい!!」ということなので，**「違う x が同じ y に変換される」ようなことが起こらないでほしい**のです．この希望を数式で書けば，

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (\text{異なる } x \text{ はに異なる } y \text{ に変換される})$$

を満たしてくれないと逆関数は定義できないということ．または，対偶をとって

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (\text{変換されて同じになったなら，もともと同じものだった})$$

と表すこともできます．これを満たす関数じゃないと，逆関数は定義できません．この条件を満たす関数 $y = f(x)$ を，**単射 (injection)** であるといいます．**「逆関数が定義できる条件は，その関数が単射であること」**というわけです．

最後に，逆関数は以下の性質を満たします．

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x, f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

これはどういうことかというと，以下のように考えれば当たり前の性質です．

$$\underbrace{f^{-1}\left(\underbrace{f(x)}_{(1)\ \text{まず } x \text{ を変換}}\right)}_{(2)\ \text{それを逆関数で変換前に復元}} = \underbrace{x}_{(3)\ \text{そりゃ元に戻る．}}$$

… ふぅ… なんとか脚注で収まった… よかったよかった…

ける」ことができます．これをきっちりと理解しておくと，微分公式の暗記からひとつ解放されます．

例 13. 次の関数を微分しなさい．

$$y = 2^x.$$

さて，我々は「$y = e^x$」以外の指数関数の微分のしかたを知りません．しかし，$x = e^{\log x}$ という捉え方を使えば，この問題は瞬殺です．

$$\begin{aligned} y &= 2^x \\ &= e^{\log 2^x} \qquad (\text{むりやり } 2^x \text{ を } e \text{ の肩に!!}) \\ &= e^{x \log 2} \qquad (\log \text{ の基本性質 } \log a^b = b \log a). \end{aligned}$$

e の肩で x にくっついている $\log 2$ というのは，ただの x の係数なので，$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$ と全く同じ考え方で，

$$y = \log 2 \cdot e^{x \log 2} = \log 2 \cdot \underbrace{e^{\log 2^x}}_{2^x} = 2^x \log 2.$$

例 14. 次の**「一般の底の指数関数の微分公式」**を証明しなさい．

$$(a^x)' = a^x \log a.$$

さっきの問題の流れをなぞればすぐにできます．

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\log a^x} \\ &= e^{x \log a} \\ (a^x)' &= \left(e^{x \log a}\right)' \\ &= \log a \cdot e^{x \log a} \\ &= \log a \cdot \underbrace{e^{\log a^x}}_{a^x} \\ &= a^x \log a. \end{aligned}$$

なんというか，2つの声が聞こえて来る気がします．

(声1) **「試験時間内にこんな導出をやっている暇はないよ…」**
(声2) **「丸暗記したほうが早くね!?」**

どちらの方も，いまいちど **1.8.1「公式の正しい覚え方」** に戻りましょう．

2.1.1　典型的なスパイラルの話

ちなみにここで「丸暗記」に逃げようとすると，次のドツボにはまってしまいます．

この公式は **「それほど頻繁には登場しない」** くせに **「思い出したようにたまに現れる」**．

この公式を「暗記」できずに苦しんでいる学生を，僕は何度も何度も見てきています．そして，そのような学生は必ず次のような **典型的なスパイラル** にはまっています．

典型的なスパイラル

(Step1) 久々に「$y = 2^x$ を微分せよ」という問題に出会う．
(Step2) 学生（あっ… これどうやって微分するんだっけ… 公式が思い出せない… 微分できない…）
(Step3) おもむろに教科書を手に取り，**「一般の底の指数関数の微分公式」** を参照．
(Step4) 学生（あぁ〜… そうだったそうだった… ほんと，ややこしくて覚えられないなぁ，この公式… えーのえっくすじょうろぐえー… えーのえっくすじょうろぐえー… まったく，覚えることばっかりで嫌になるな）[a]
(Step5) そして学生はこの公式「えーのえっくすじょうろぐえー」を，**2日で丸忘れする**．　**→ (Step1)** に戻る．

[a] この覚え方，そう，**「丸暗記」**．これが，このスパイラルから抜け出せない唯一にして最大の原因．まったく，こんなイミフなひらがなの羅列を，ずっと覚えていられるわけがないというのに．

大丈夫ですか？「ギクッ」としていませんか？

もし，このスパイラルから抜けられずにあなたが苦しんでいるのなら，**1.8.1「公式の正しい覚え方」** に書かれているように，この章で扱った

「$(a^x)' = a^x \log a$」を，必要になるたび導出 → 気がついたら頭に完全定着

という流れにシフトしてみてください．

この流れに乗ってしまえば，意味のわからない暗唱や語呂合わせに頼ることなく，公式を頭に深く刻み込むことができますし，仮に忘れたとしても，**「あーあ，底が e だったら**

いいのに...!! (e **の肩に乗ってたらいいのに...!!)」**とさえ思うことができれば，すぐに導出をすることができます．

2.2　一般の底の対数関数の微分

例 15. 次の関数を微分しなさい．

$$y = \log_2 x.$$

さて，**底が 2 であるような対数関数**の微分の問題です．我々は，**自然対数 (底が** e **の対数関数)** の微分公式しか知りません．

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

が，対数関数の底が何であっても，対数関数のもっとも基本的な公式である**「底の変換公式」**[*2]を思い出せば，簡単に微分をすることができます．

「底の変換公式」

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

我々は**「底が** e **ならば微分できる」**ので，$y = \log_2 x$ の底を e に取り替えましょう．取り替えるときに使うのが**底の変換公式**です．

$$y = \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}.$$

[*2] **（証明）** $x = \log_a b$ とおいて，両辺を a の肩に乗せると，$a^x = \underbrace{a^{\log_a b} = b}_{\log_a x \text{ と } a^x \text{ は逆関数}}$．

両辺，底が c の対数をとると，

$$\begin{aligned} \log_c a^x &= \log_c b \\ x \log_c a &= \log_c b \\ x &= \frac{\log_c b}{\log_c a}. \end{aligned}$$

よって，底の変換公式が成り立つ．

あとは，この y を微分です．$\frac{1}{\log 2}$ はただの係数であることに注意．

$$y' = \left(\frac{\log x}{\log 2}\right)' = \frac{1}{\log 2}(\log x)' = \frac{1}{x \log 2}.$$

以上でオシマイ．全く同様の手順で，次の微分公式が一瞬で導けます．

一般の底の対数の微分公式

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

もう言うまでもないと思いますが，これも「えっくすろぐえーぶんのいち...」のような「理屈無視の丸暗記」は絶対にやめるべきです．こんな公式は，次のように 1 行で導出してしまえば良いのですから．

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}(\log x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

2.3　対数微分法

高専や大学の微分の教科書には，ほぼ必ず**「対数微分法」**という方法が載っています．何だか大層な名前がついているので，新しい方法なんだろうなぁ，と思いがちなのですが，実はこの対数微分法は，別に「新しい」方法というわけではありません．

e.g.

$y = x^x$ を微分しなさい．

まず，この関数を微分する方法を我々は今のところ知りません[*3]．しかし，次の発想で一気に突破口が開けます．

「対数をとれば，右辺の肩の x が前に出てちょっとは簡単になりそうだ...」

[*3] 間違っても，「肩の x が降りてきて，肩の x から 1 引いて，$x \cdot x^{x-1}$ で...」なんてやっちゃダメですよ．これをやって良いのは，x の肩に乗っているのが定数の時だけです．

まぁ，だったら両辺の対数とってみますかと，当然のように思うわけです．

$$\log y = \log x^x$$

log の性質 $\log a^b = b\log a$ より，

$$\log y = x\log x.$$

で，両辺を x で微分します．すると，左辺は y が x の関数なので，合成関数の微分法則[*4]により，

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{y\text{ で微分}}\ \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y\text{ を微分}} = \underbrace{\log x + 1}_{\text{積の微分法則}}$$

この問題は「$y = x^x$ を微分せよ」という問題なので，最終的に求めたいのは $\frac{dy}{dx}$ なのですが，なんと左辺に $\frac{dy}{dx}$ が現れています．だったら，$\frac{dy}{dx}$ について解いてしまえば良い！ということで，両辺に y をかけましょう．

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1).$$

$y = x^x$ だったので，

$$\frac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1).$$

こんな具合に，合成関数の微分法で「間接的に」微分ができてしまいました．この方法を**対数微分法**と呼ぶわけです．

[*4] 合成関数の微分法則のときに，例えば

$$y = (2x+1)^{10}$$

という関数を微分したければ，$u = 2x+1$ とおいて，「u^{10} を x で微分」するときは，

$$\underbrace{10u^9}_{u\text{ で微分}}\ \underbrace{2}_{u\text{ を微分}}$$

ってやりましたよね．これと全く同じことを，「$\log y$ を x で微分」でやっているというイメージです．

対数微分法は「自然なアイデア」

(i) $y = f(x)$ を微分したいが，
　このままでは微分できない　$\rightarrow$ 対数を取ると簡単!?

(ii) ならば両辺の対数をとって $\log y = \log f(x)$ と変形．

(iii) 両辺を x で微分すると，$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \sim$ ．

(iv) $\dfrac{dy}{dx}$ について解く (両辺に y をかける)．

対数微分法は，「いたって自然なアイデア」でしかありません．だって「対数をとると簡単になりそうだなぁ」と思ったから「対数とってみよう」というだけなのだから．そして，両辺とりあえず x で微分してみると，$\frac{dy}{dx}$ が左辺にきちっと出てくるじゃないかという，それだけの話なのです．**大層な名前に騙されて混乱しちゃダメ**．

もう 1 つくらい，関数を微分してみましょう．

e.g.
　$y = x^{\cos x}$ を対数微分法で微分しなさい．

試験問題ではよく，こんなふうに「対数微分法で微分しなさい」という指示が出ることがあります．そして，**「えぇぇ... 対数微分法って何だったかな... なんか教科書には載ってた気がするけど，忘れてしまった... どうやるんだっけ...」**と頭がパニックになり，結果として手を付けられずにバンザイしてしまう学生を今まで何人も見たことがあります．

しかし，先程までの内容を理解しているのならば，もはや怖いものはないでしょう．「対数微分法で微分しなさい」という文言は，**「両辺対数とったら微分しやすくなるからそうやって微分してね」**という，出題者からのヒントですらあるのです．[*5]

[*5] ちなみに，いちいち「対数微分法でやれ」なんて指示が出なくても，「肩に x の関数が乗っていると扱いにくそう...」という感覚と，「log をとれば，肩の関数を前に下ろせる」ということを思い出せれば，**両辺の対数を取る**という操作に（言われずとも）自然にたどり着きます．

$$\log y = \log x^{\cos x}$$

右辺を log の性質で変形すると，

$$\log y = \cos x \log x$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\sin x \log x + \cos x \frac{1}{x}.$$

両辺に y をかけて，

$$\frac{dy}{dx} = y\left(-\sin x \log x + \cos x \frac{1}{x}\right).$$

2.4　この章のまとめ

この章では，以下の公式を「導出」し，そして実際にいろいろな